TELEKOLLEG MultiMedial Drittes Trimester

MATHEMATIK
Vorbemerkungen

Im dritten Trimester werden im Fach Mathematik an den Kollegtagen die bisherigen Lerninhalte vertieft und die Telekollegiaten auf die Abschlussprüfung vorbereitet.
Eine Begleitung durch Lehrsendungen findet nicht statt.
Grundlage sind die Mathematikbücher **„Algebra“** und **„Vektorrechnung und Analytische Geometrie“** aus dem 1. Timester des Lehrgangs sowie **„Differenzialrechnung“** aus dem 2. Trimester.

Der Stoff, der in diesem Trimester bearbeitet wird, ist in vier Themenbereiche eingeteilt.

- Vektoren; Vektoralgebra; Analytische Geometrie
  - Lösen linearer Gleichungssysteme
  - Berechnung von Längen und Winkeln
  - Gleichungen von Geraden und Ebenen im IR^3
  - Berechnung von Flächen und Volumina

- Kurvendiskussion
  - Dieser Themenbereich befasst sich mit typischen Aufgaben- und Fragestellungen der Feststellungsprüfung und der Abschlussprüfung.

- Anwendungsbezogene Aufgaben (Extremwertaufgaben)
  - Auch dieser Themenbereich bereitet auf die Aufgaben der Feststellungs- und Abschlussprüfung vor.

- Prüfungsvorbereitung
  - Hier sollen Aufgaben entsprechend der 2. Feststellungsprüfung und der Abschlussprüfung geübt werden.

Verwenden Sie zur Lösungsfindung das Buch **„Mathematik Formeln und Begriffe“**, damit Sie mit dem Inhalt vertraut werden. Sie finden deshalb zu den einzelnen Themenbereichen bei den Aufgaben Hinweise, auf welcher Seite Sie in der „Formelsammlung“ entsprechende Unterstützung finden.

Wenn es zur Weiterbearbeitung der Aufgabe erforderlich ist, werden Ergebnisse angegeben.

Zu jedem Themenbereich gehört ein Arbeitsbogen, der zu bearbeiten ist.

Sie können zur Prüfungsvorbereitung ferner verwenden:
- die Übungsaufgaben aus den Büchern zur Mathematik im Telekolleg,
- Ihre bearbeiteten Arbeitsbögen,
- das Buch **„Mathematik Übungs- und Prüfungsaufgaben“**.

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Vektoren und Analytische Geometrie** **1(5)**

J. Dillinger

Vektoralgebra

Lernmittel: Vektorrechnung und Analytische Geometrie (VuG); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(-5|12|-9), B (-1|0|-3) und $C_k(0|k|3k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Berechnen Sie die Entfernung des Punktes A vom Koordinatenursprung.
(VuG Kapitel 3; FS S. 37)

1.2 Berechnen Sie die Entfernung der Punkte A und B.
(VuG Kapitel 3; FS S. 37)

1.3 Berechnen Sie k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC_k}$ gleiche Länge haben.
(VuG Kapitel 3; FS S. 37)

1.4 Berechnen Sie k so, dass der Vektor $\overrightarrow{AC_k}$ die Länge $\sqrt{230}$ hat.
(VuG Kapitel 3; FS S. 37)

2.0 Die Punkte Q(3|0|4), R(4|-2|6) und S(5|0|3) sind die Punkte eines rechtwinkligen Dreiecks.

2.1 Zeigen Sie, dass bei Q ein rechter Winkel ist.
(VuG Kapitel 2 und 3; FS S. 37)

2.2 Berechen Sie die fehlenden Winkel im Dreieck QRS.
(VuG Kapitel 2 und 3; FS S. 37)

2.3 Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks QRS.
(VuG Kapitel 3; FS S. 40)

2.4 Ergänzen Sie das Dreieck QRS so, dass ein Rechteck QRST entsteht. Geben Sie die Koordinaten des Punktes T an.
(VuG Kapitel 1 und 3; FS S. 35)

2.5 Berechnen Sie die Fläche des Rechtecks QRST.
(VuG_Kapitel 3; FS S 40)

2.6 Berechnen Sie den Umfang U des Rechtecks QRST.
(VuG Kapitel 3; FS S. 37)

2.7 Geben Sie den Schnittpunkt D der Diagonalen im Viereck QRST an.
(VuG Kapitel 1 und 3; FS S. 36)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Vektoren und Analytische Geometrie** **2(5)**

J. Dillinger

Geraden im Raum

Lernmittel: Vektorrechnung und Analytische Geometrie (VuG); Formeln und Begriffe (FS)
Hinweis: Fertigen Sie Handskizzen zum besseren Verständnis an.

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte Q(-2|0|0), R(6|-2|6) und die Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit λ und a $\in \mathrm{IR}$ gegeben.

1.1 Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch die Punkte Q und R festgelegt ist.
(VuG Kapitel 3; FS S. 38)

1.2 Wie weit ist der Punkt Q vom Punkt R auf der Geraden h entfernt?
(VuG Kapitel 3; FS S. 37)

1.3 Zeigen Sie, dass für a = 1 die Geraden g_1 und h keinen gemeinsamen Punkt haben.
(VuG Kapitel 4; FS S. 38)

1.4 Bestimmen Sie a so, dass g_a und h sich schneiden, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S an.
(VuG Kapitel 4; FS S. 38)

1.5 Berechnen Sie den Schnittwinkel φ zwischen den Geraden g und h.
(VuG Kapitel 3; FS S. 37)

1.6 Geben Sie eine Gerade n an, die durch den Schnittpunkt S geht und auf den beiden Geraden g und h senkrecht steht.
(VuG Kapitel 4; FS S. 37)

1.7 Geben Sie eine zu g_1 parallele Gerade g_p an, die durch den Punkt P(1|1|1) geht.
(VuG Kapitel 4; FS S. 38)

1.8 Berechnen Sie den Abstand der parallelen Geraden.
(VuG Kapitel 4; FS S. 37)

J. Dillinger

Geraden – Ebenen

Lernmittel: Vektorrechnung und Analytische Geometrie (VuG); Formeln und Begriffe (FS)
Hinweis: Fertigen Sie Handskizzen zum besseren Verständnis an.

1.0 Gegeben sind die Punkte A(-1|0|3), B(2|0|1) und C(1|-1|0) sowie die

Geraden g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\lambda \in$ IR

und i mit i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und i.
(VuG Kapitel 4; FS S. 38)

1.2 Erstellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und Normalenform, die durch die Punkte A, B und C aufgespannt wird.
(VuG Kapitel 4und 6; FS S. 39/40)

1.3 Berechnen Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel φ der Geraden g mit der Ebene E.
(VuG Kapitel 4; FS S. 37)

1.4.0 Gegeben ist die Ebene F: $2x_1 + (4+k)x_2 - 2x_3 = 3$ und

die Gerade i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

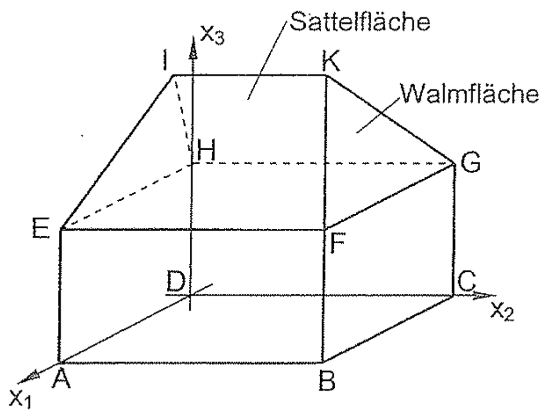
1.4.1 Berechnen Sie den Wert von k so, dass i senkrecht auf F steht.

1.4.2 Berechnen Sie den Wert von k so, dass gilt: i parallel zu F.
(VuG Kapitel 6; FS S. 41)

Prüfungsaufgabe

Lernmittel: Vektorrechnung und Analytische Geometrie (VuG); Formeln und Begriffe (FS)
Hinweis: Fertigen Sie Handskizzen zum besseren Verständnis an.

1.0 Neben abgebildete Skizze zeigt ein Haus mit der Grundform eines Quaders und einem Dach, welches als Walmdach ausgeführt ist.



Für die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen gilt jeweils: 1 LE $\hat{=}$ 1 m. Die Maße des Hauses sind durch die Koordinaten folgender Punkte gegeben: A(8; 0; 0), B (8; 10; 0), D(0; 0; 0), F(8; 10; 4), G(0; 10; 4), H(0; 0; 4), I(4; 2; 8) und K(4; 8; 8).
Der Punkt L(4; –6; –1,5) ist der Fußpunkt eines 13 m hohen Mastes mit der Spitze S. Der Mast steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene. Bei nachfolgenden Rechnungen soll auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden.

1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C, E und S.

1.2 Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl der Walmfläche FGK.

1.3 Berechnen Sie den Abstand der Spitze S des Mastes zum Punkt I.

1.4 Die Sattelfläche GHIK ist ein gleichschenkliges Trapez. Berechnen Sie den Innenwinkel GKI.

1.5 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes R der Raumdiagonalen des Quaders.

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Vektoren und Analytische Geometrie** **5(5)**

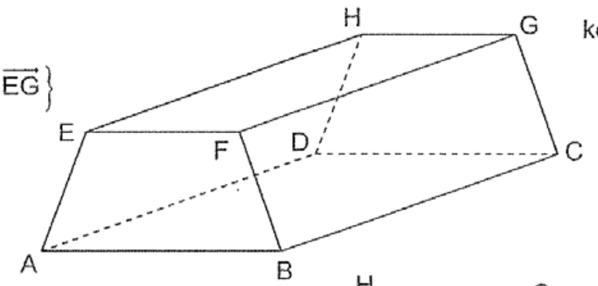
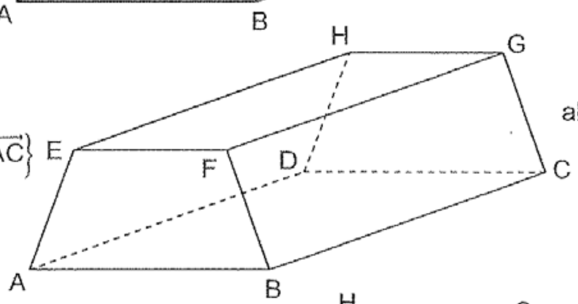
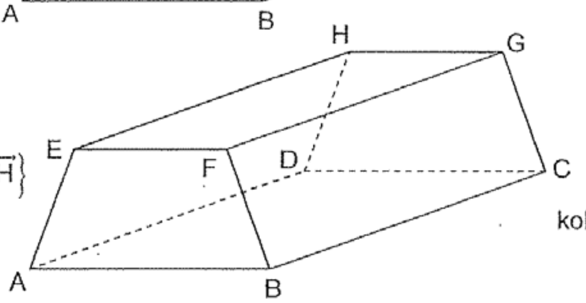
J. Dillinger

Prüfungsaufgabe

Lernmittel: Vektorrechnung und Analytische Geometrie (VuG); Formeln und Begriffe (FS)
Hinweis: Fertigen Sie Handskizzen zum besseren Verständnis an.

1.0 Die Raumbilder zeigen drei Prismen. Das Trapez ABFE ist gleichschenklig und seine Grund- und Decklinie sind zueinander parallel. Das Trapez ABFE ist parallel und deckungsgleich zum Trapez DCGH.

1.1 Gegeben sind drei Vektormengen. Zeichnen Sie die Vektoren jeder Menge in eines der nebenstehenden Raumbilder des Angabenblattes ein und kreuzen Sie an, welche Eigenschaft die Vektoren der angegebenen Mengen haben (Hinweis: Es ist jeweils nur eine Aussage zu jeder Vektormenge richtig).

Vektormengen	Raumbilder	Eigenschaften	
$\left\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{HD}; \overrightarrow{EG}\right\}$		komplanar ☐	linear unabhängig ☐
$\left\{\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{GE}; \overrightarrow{AC}\right\}$		linear abhängig ☐	linear unabhängig ☐
$\left\{\overrightarrow{FE}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{GH}\right\}$		kollinear ☐	linear unabhängig ☐

1.2 Gegeben sind die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{FE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{FG}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{FB}$. Drücken Sie den Diagonalenvektor $\overrightarrow{AG}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus, wenn gilt: $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FE}$.

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Kurvendiskussion 1(4)**

J. Dillinger

Allgemeines: Bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben besteht häufig das Problem, die Aufgabenstellung in mathematische Gleichungen umzusetzen. Es ist notwendig, aus der Aufgabenstellung auf den korrekten mathematischen Zusammenhang zu schließen, um einen Lösungsansatz zu bekommen.
Im Folgenden sind die am häufigsten gebrauchten Formulierungen bei Aufgabenstellungen dargestellt:

Definitionsmenge
Alle x-Werte, die in den Funktionsterm eingesetzt werden dürfen, ohne ein „Rechengesetz" zu verletzen.

Nullstellen
Nullstellen sind die Stellen x_0, an denen der Graph der Funktion die x-Achse schneidet.
Schnittstellen mit der x-Achse $\Rightarrow f(x) = 0$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bedeuten Schnittpunkt mit der y-Achse und Schnittpunkt mit der x-Achse.
Schnittpunkt mit der **y-Achse** $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) \rightarrow \mathbf{S(0| y_s)}$
Schnittpunkt mit der **x-Achse** (Nullstellen) $\Rightarrow f(x) = y = 0 \rightarrow \mathbf{N(x_0|0)}$

Grenzwertuntersuchung und Asymptoten
Untersuchungen von Funktionen für $x \rightarrow \infty$, für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow x_o$ bedeuten
Grenzwertuntersuchungen $\Rightarrow \lim\limits_{|x|\rightarrow\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\rightarrow x_0} f(x)$

Symmetrieverhalten
Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie
Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = - f(-x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie

Monotonie
Soll der Graph einer Funktion auf Monotonie untersucht werden, so ist die 1. Ableitung der Funktion zu untersuchen, denn sie gibt die Steigung der Funktion für alle $x \in D$ an. Es gilt:
streng monoton steigend: $f'(x) > 0$; streng monoton fallend: $f'(x) < 0$

Relative Extremwerte
Soll der Graph einer Funktion auf relative Extremwerte untersucht werden, so ist erst die Lage des Extremwerts (an welcher Stelle x_o er liegt) und dann die Art (relativer Hochpunkt oder relativer Tiefpunkt) zu ermitteln.
Notwendige Bedingung (Lage): $f'(x) = 0$
Hinreichende Bedingung (Art): $f''(x_o) > 0 \Rightarrow$ Minimum (relativer Tiefpunkt)
$f''(x_o) < 0 \Rightarrow$ Maximum (relativer Hochpunkt)

Wendepunkt
Als Kriterium für einen Wendepunkt gilt: $f''(x_o) = 0 \wedge f'''(x_o) \neq 0$

Krümmungsverhalten
Das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion wird mithilfe der 2. Ableitung der Funktion untersucht.
Es gilt: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Der Graph der Funktion ist linksgekrümmt.
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ Der Graph der Funktion ist rechtsgekrümmt.

Tangente an den Graphen
Eine Tangente ist eine Gerade, die den Graphen im Punkt P $(x_o | y_o)$ berührt. Die Funktionsgleichung der Geraden lautet $y = m \cdot x + t$. Für die Steigung m gilt: $m = f'(x_o)$; t kann berechnet werden, indem man den Punkt P $(x_o | y_o)$ in die Geradengleichung $y = f'(x_o) \cdot x + t$ einsetzt.

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Kurvendiskussion 2(4)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen (Erstellen von Funktionsgleichungen aus Vorgaben)

Hinweise: Funktion 2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$;
Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1. Der Graph G(f) einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades berührt die x-Achse bei x = -3. Die Steigung der Tangente im Punkt P(0|-9) beträgt 3.
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f.
   (Ergebnis: $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$)
   (Ableitung bilden: FS S. 47; Lösen linearer Gleichungen: AL)

2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion f dritten Grades, deren Graph G(f) im Punkt E(0|5) einen Extremalpunkt und im Punkt W(-2|0) einen Wendepunkt besitzt.
   (Ergebnis: $f(x) = -\frac{5}{16}x^3 - \frac{15}{8}x^2 + 5$)
   (Ableitungen bilden: FS S. 50 ff.; Lösen linearer Gleichungen: AL)

3. Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion f dritten Grades, deren Graph G(f) durch den Punkt P(2|0) geht und im Punkt Q(-2|-4) einen Extremalpunkt besitzt so wie im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung 1,5 hat.
   (Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x - 2$)
   (Ableitungen bilden: FS S. 50 ff.; Lösen linearer Gleichungen: AL)

4. Bestimmen Sie die Gleichung der ganzrationalen Funktion f dritten Grades, deren Graph G(f) durch den Ursprung und den Punkt P(3|0) geht und im Punkt Q(1|f(1)) die Tangente t: $y = -\frac{3}{4}$ besitzt.
   (Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$)
   (Ableitungen bilden: FS S. 50 ff.; Lösen linearer Gleichungen: AL)

5 Die ganzrationale Funktion f hat die erste Ableitung $f'(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ und eine Nullstelle bei x = -3.
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f.
   (Ergebnis: $f(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2$)
   (Ableitungen bilden: FS S. 50 ff.; Koeffizientenvergleich; Lösen linearer Gleichungen: AL)

MATHEMATIK

Themenbereich **Kurvendiskussion 3(4)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen (Nullstellen; Polynomdivision)

Hinweise:

Gleichung 2. Grades: $0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ Lösungsformel $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Gleichung 3. Grades: a) $0 = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow 0 = x(ax^2 + bx + c)$
Satz vom Nullprodukt ; Lösungsformel

b) $0 = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow$
Nullstelle ist im Text angegeben
oder Nullstelle durch Probieren suchen
(suche mit $\pm$ 2; $\pm$1); dann Polynomdivision

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2$. Der Graph der Funktion f wird mit G bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit den Koordinatenachsen.
(Ergebnis: $S_y(0|0)$; $N_1(0|0)$; $N_2(6|0)$)

(FS S. 50)

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 12x^2 + 36x)$. Der Graph der Funktion f wird mit G bezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit den Koordinatenachsen.
(Ergebnis: $S_y(0|0)$; $N_1(0|0)$; $N_2(6|0)$)

(FS S. 50)

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 24x + 16)$. Der Graph der Funktion f wird mit G bezeichnet. Zeigen Sie, dass x = -4 eine Nullstelle der Funktion f ist, und berechnen Sie weitere Nullstellen.
(Ergebnis: $x_1 = -4$; $x_{2,3} = \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$)

(Polynomdivision: Dif S. 220; Lösungsformel)

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 11)$.
Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse.
(Ergebnis: $N_1(1|0)$; $N_2(1-2\sqrt{3}\,|0)$; $N_3(1+2\sqrt{3}\,|0)$)

(Nullstelle durch Probieren suchen; Polynomdivision: Dif S. 220; Lösungsformel)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Kurvendiskussion 4(4)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen (relative Extremwerte; Wendepunkt; Tangente)

Lernmittel: Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.
Der Graph der Funktion f wird mit G(f) bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie Lage und Art der Extremalpunkte des Graphen G(f) und geben Sie deren Koordinaten an.
(Ergebnis: H(0|4); T(4|0))

(Dif Kapitel 9; FS S. 50 ff.)

1.2 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen G(f) und geben Sie die Funktionsgleichung der Tangente im Wendepunkt (Wendtangente) an.
(Ergebnis: W(2|2); y = -1,5x + 5)

(Dif Kapitel 9; FS S. 50 ff.)

2.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 12x + 16)$. Der Graph der Funktion f wird mit G(f) bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie Lage und Art der Extremalpunkte des Graphen G(f) und geben Sie deren Koordinaten an.
(Ergebnis: H(2|0); T(-2|-4))
(Dif Kapitel 9; FS S. 50 ff.)

2.2 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen G(f) und geben Sie die Wendetangente an.
(Ergebnis: W(0|-2); y = 1,5x - 2)

(Dif Kapitel 9; FS S. 50 ff.)

3.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 6$. Der Graph der Funktion f wird mit G(f) bezeichnet.

3.1 Untersuchen Sie den Graphen G(f) auf relative Extremwerte nach Lage und Art und geben Sie deren Koordinaten an.
(Ergebnis: H(0|6); T(4|0))

(Dif Kapitel 9; FS S. 50 ff.)

3.2 Der Graph der Parabel G(p) schneidet die x-Achse bei x = 4 und ihr Scheitel liegt im Wendepunkt des Graphen G(f). Berechnen Sie den Funktionsterm der Parabel p.

(Ergebnis: $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$)

(Dif Kapitel 9; FS S. 50 ff.)

J. Dillinger

Schritte beim Lösen anwendungsbezogener Aufgaben

1. Gesuchte Größe: Welche Größe ist bei der Aufgabenstellung gesucht und soll eventuell auf ein Maximum oder Minimum hin untersucht werden?

2. Gesuchte Größe als Funktionsgleichung: Die gesuchte Größe muss als Funktionsgleichung dargestellt werden.

3. Definitionsbereich: Für die Funktion ist ein sinnvoller Definitionsbereich D zu erstellen. Es dürfen z. B. keine negativen Zeiten oder Strecken vorkommen.

Funktionsgleichung:
Mehr als eine Variable?

JA → 4.

NEIN → 5.

4. Funktionsgleichung mit einer Variablen: Mithilfe von Nebenbedingungen muss eine Funktionsgleichung mit der gesuchten Variablen gebildet werden. Nebenbedingungen ergeben sich z.B. aus der Angabe, aus der Physik (Formeln) oder aus geometrischen Zusammenhängen (Pythagoras; Strahlensatz).

5. Extremwertberechnung: Von der Funktion werden die relativen Extremwerte nach Lage und Art bestimmt.

Lage: Erste Ableitung gleich null
Überprüfung, ob Nullstelle der ersten Ableitung im Definitionsbereich liegt.

Art:
a) Mithilfe der zweiten Ableitung (Krümmung)
b) Mithilfe der ersten Ableitung in der Umgebung der Extremstelle (Steigung)
c) Mithilfe der Funktionsgleichung in der Umgebung der Extremstelle (Funktionswerte)

6. Randextrema: Die Funktionswerte am Rand des Definitionsbereichs sind zu berechnen und mit den Funktionswerten der relativen Extremwerte zu vergleichen. Der Vergleich zeigt, ob es sich bei den relativen Extremwerten auch um absolute Extremwerte handelt.

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Anwendungsbezogene Aufgaben 2(7)**

J. Dillinger

Volumen- und Oberflächenberechnung (Dif Kapitel 10 und 11)

Lernmittel: Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Bei einer Serienfertigung sollen zylindrische Dosen gefertigt werden. Das Volumen einer Dose soll 1 Liter betragen. Es sollen bei einem Fertigungsprozess 45000 Stück hergestellt werden.

1.1 Berechnen Sie die Oberfläche einer Dose bei einer Dosenhöhe von
$h = 20{,}0$ cm.
(FS Grundlagen Geo)

2.0 Im Folgenden gilt: $h, r \in IR^+$.

2.1 Bestimmen Sie die Gleichung O(r) für die Oberfläche der Dose in Abhängigkeit vom Dosenradius r.
(Dif Kapitel 11)

2.2 Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für r an.

2.3 Die Dose aus 2.1 soll in ihrem Durchmesser und ihrer Höhe so bemessen werden, dass der Materialverbrauch so gering wie möglich ausfällt. Für welchen Wert des Radius r liegt der geringste Materialverbrauch vor?
(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

2.4 Berechnen Sie die geringste Oberfläche der Dose in cm^2.

2.5 Zeichnen Sie den Graphen der Oberflächenfunktion O(r) in Abhängigkeit von r in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
Wählen Sie einen geeigneten Maßstab.

2.6 Bestimmen Sie das Verhältnis vom Durchmesser zur Höhe der Dose.

2.7 Berechnen Sie die Materialeinsparung in m^2 der gesamten Serienfertigung im Vergleich zu der Dosendimensionierung der Dose aus Teilaufgabe 1.1.

Ganzrationale Funktionen (Extremwertaufgabe)

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Eine 40 Meter lange Brücke überspannt einen Flusslauf. Der Auflagepunkt A auf der linken Brückenseite besitzt die Koordinaten A(0|0), der Auflagepunkt B liegt auf der gleichen Höhe wie A. Stabilität wird der Brücke u. a. durch einen Parabelbogen verliehen, der durch die Funktionsgleichung $y = ax^2+bx+c$ beschrieben werden kann (siehe Skizze).
Die parabelförmige Stahlkonstruktion geht auch durch die Punkte A und B und den Punkt C (30|9).

1.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, mit der der Parabelbogen beschrieben werden kann.
(Ergebnis: $y = -0{,}03x^2 + 1{,}2x$)

(AL Kapitel 3 und 4)

1.2 Berechnen Sie die Höhe des Brückenbogens an der Stelle, die 8 m vom Punkt B entfernt ist.

(AL Kapitel 4; FS S. 24 ff.)

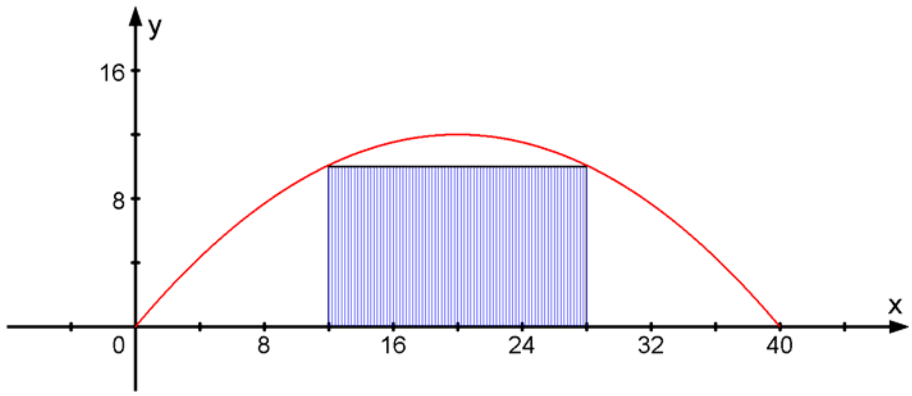
1.3 An welcher Stelle hat der Parabelbogen eine Höhe von 12 m?

2.0 Eine Friedensbewegungsgruppe will gegen die Kriege auf der Welt protestieren und möchte aus diesem Grund ein möglichst großes rechteckiges Transparent mit entsprechender Aufschrift am Brückenbogen anbringen.

2.1 Stellen Sie die Rechtecksfläche des Transparents in Abhängigkeit von den Auflagerpunkten x dar.
(FS Grundlagen Geo)

2.2 Für welchen Wert von x wird die größte Fläche erzielt und welche Maßzahl hat sie?

(Dif Kapitel 10; FS S 48 ff.)



TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Anwendungsbezogene Aufgaben 4(7)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen (Extremwertaufgabe)

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Eine Konditorei stellt unter anderem auch Torten her. Der Konditor weiß, dass er umso mehr Torten (Anzahl x) verkaufen kann, je geringer der Preis p(x) pro Torte ist. Der Preis lässt sich durch den Term $p(x) = 0{,}005 \cdot x^2 - x + 58$ (in €) beschreiben, falls gilt: $10 \leq x \leq 100$.

Andererseits entstehen dem Bäcker Selbstkosten sk(x) pro Torte, die bei steigender Stückzahl abnehmen. Dieser Sachverhalt wird in der Tabelle 1 dargestellt:

Tabelle 1: Selbstkosten pro Torte			
x	10	40	60
sk(x) in €	15	12	10

1.1 Was darf der Konditor für jeweils 1 Torte verlangen, wenn er 20 bzw. 30 Torten verkaufen möchte?

1.2 Leiten Sie aus der Tabelle 1 den linearen Zusammenhang für sk(x) her.
(Ergebnis: $sk(x) = -0{,}1x + 16$)

(AL Kapitel 2; FS S. 13 ff.)

1.3 Wie lautet der Term für den Gesamterlös $e(x) = x \cdot p(x)$ beim Verkauf von x Torten?
(Ergebnis: $e(x) = 0{,}005x^3 - x^2 + 58x$)

1.4 Berechnen Sie den Gesamterlös für die jeweilige Anzahl von Torten aus 1.1.

1.5 Zeigen Sie, dass sich die Gewinnfunktion g(x) als Term der Form
$g(x) = e(x) - x \cdot sk(x) = 0{,}005x^3 - 0{,}9x^2 + 42x$ darstellen lässt.

1.6 Bei wie vielen verkauften Torten ist der Gewinn am größten bzw. am kleinsten?

(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

1.7 Wie hoch ist der Gewinn bei 30 verkauften Torten?

1.8 Für welche Anzahl von Torten wird kein Gewinn erzielt?
(Nullstellenberechnung)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Anwendungsbezogene Aufgaben 5(7)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen (Extremwertaufgabe)

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Ein Gegenstand wird über einem Gelände vom Punkt A(0|3) zum Punkt B(10|6) geschossen. Die Flugbahn ist eine Parabel zweiter Ordnung, die durch die Funktion f beschrieben wird.
Das Profil des Geländes wird durch die Funktion g: $g(x) = 0{,}015x^3 - 0{,}12x^2 + 3$ beschrieben.

1.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, wenn die Flugbahn im Startpunkt A einen Winkel von 45° mit der Waagrechten einschließt.
(Teilergebnis: $f(x) = -0{,}07x^2 + x + 3$)

(AL Kapitel 2 und 3; Dif Kapitel 8; FS S. 48 ff.)

1.2 Bestimmen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

1.3 Bestimmen Sie die Lage und Art von relativen Extremwerten sowie den Wendepunkt des Geländeprofils, das durch die Funktion g: $g(x) = 0{,}015x^3 - 0{,}12x^2 + 3$ beschrieben wird.
(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

1.4 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g im Bereich $0 \leq x \leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.
(Berechnen Sie f(0) und f(10) und verwenden Sie bekannte Ergebnisse.)

1.5 Bestimmen Sie die Gleichung für die Flughöhe h(x) = f(x) – g(x) über dem Geländeprofil.
(Ergebnis: $h(x) = -0{,}015x^3+0{,}04x^2+x$)

1.6 Berechnen Sie die größte Flughöhe über dem Geländeprofil.

(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

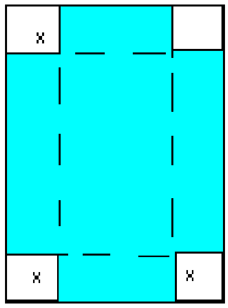
Themenbereich **Anwendungsbezogene Aufgaben 6(7)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen (Extremwertaufgabe)

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Aus einem rechteckigen Stück Papier mit der Länge l = 3 dm und der Breite b = 2 dm wird an jeder Ecke ein Quadrat (hell) der Seitenlänge x (in dm) herausgeschnitten.
Die überstehenden Rechtecke werden entlang der gestrichelten Linien senkrecht nach oben gefaltet, sodass ein oben offener Quader vom Volumen V entsteht.



1.1 Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für x an.

1.2 Zeigen Sie, dass sich das entstandene Quadervolumen V mit dem Term $V(x) = 4x^3 - 10x^2 + 6x$ beschreiben lässt (Volumeneinheit dm^3).
(Dif Kapitel 10; FS Grundlagen Geo)

1.3 Berechnen Sie, für welche Werte von x das Volumen null ist.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion V(x) in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein.
Fertigen Sie dazu eine Wertetabelle im Bereich $0 \leq x \leq 1$ mit der Schrittweite $\Delta x = 0{,}1$ (in dm) an .Für beide Achsen entspricht 1 LE = 5 cm.

1.5 Lesen Sie aus dem Graphen ab:
Für welche Werte von x ergibt sich ein Volumen von 0,7 dm^3?

1.6 Bestimmen Sie den Wert für x, bei dem das Volumen V seinen maximalen Wert annimmt.
(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

1.7 Berechnen Sie das maximale Volumen.

1.8 Berechnen Sie die Innenfläche des oben offenen Quaders.
(FS Grundlagen Geo)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Anwendungsbezogene Aufgaben 7(7)**

J. Dillinger

Exponentialfunktion (Technische Ausbildungsrichtung)

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

Hinweise: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x} \rightarrow f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$ (Kettenregel; FS S. 49); $y = e^x \rightarrow x = \ln(y)$ (Umkehrfunktion)

1.0 In einem Versuchslabor werden Materialien erwärmt und ausgetestet. Bei einer bestimmten Legierung verändert sich die Temperatur ϑ (t) des Probestückes in Abhängigkeit von der Zeit t nach folgendem Gesetz: $\vartheta(t) = 50 + 150 \cdot e^{-kt}$; $k > 0$.
Dabei gilt die Zeit t in Minuten und die Temperatur ϑ (t) in °C.
Der Graph der Funktion ϑ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem wird mit K bezeichnet.

1.1 Handelt es sich bei dieser Gesetzmäßigkeit um einen Aufheiz- oder einen Abkühlvorgang?

(FS S. 50 ff.)

1.2 Welche Temperaturen kann der Probekörper für $t \geq 0$ annehmen?

(Dif Kapitel 1; FS S. 50 ff.)

1.3 Berechnen Sie k auf drei Dezimalstellen gerundet, wenn das Messgerät nach den ersten 45 Minuten eine Körpertemperatur von 60,1 °C anzeigt.
(Teilergebnis: k = 0,060)

(Umkehrfunktion bilden)

1.4 Um wie viel °C nimmt die Temperatur nach der ersten Minute ab?

(Funktionswerte berechnen)

1.5 Ab welchem Zeitpunkt verändert sich die Temperatur des Probekörpers in einer Minute um weniger als 1 °C?
(Ungleichung berechnen)

1.6 Nach welcher Zeit besitzt der Probekörper nur noch eine Temperatur von 60 °C.

(Umkehrfunktion anwenden)

1.7 Zeichnen Sie den Graphen K der Funktion ϑ (t) für $0 \leq t \leq 90$.
Wählen Sie einen geeigneten Maßstab für die Achsen.

(ϑ (0) und ϑ (90), sowie weitere Funktionswerte berechnen)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Prüfungsaufgaben 1(5)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit

$f(x) = ax^3+2x^2+cx+d$; $a,c,d \in IR$; verläuft durch den Punkt P(-1;0) und besitzt im Punkt $Q(0 \mid -\frac{16}{3})$ die Steigung m = – 4.

1.1 Berechnen Sie die Koeffizienten a, c und d und geben Sie den Funktionsterm f(x) an.
(Lösung: $a = \frac{2}{3}$; $c = -4$; $d = -\frac{16}{3}$)
(Ableitung bilden: Dif; Lösen linearer Gleichungen: AL)

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x - \frac{16}{3}$.
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f.

2.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = -1$ eine Nullstelle der Funktion f ist, und berechnen Sie alle weiteren Nullstellen der Funktion f.
(Ergebnis: x_2 = -4; x_3 = 2)
(Polynomdivision; FS S. 24)

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extremalpunkte von G_f.
(Ergebnis: H(-2,73|6,93); T(0,73|-6,93))
(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_f und stellen Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente w_t auf.
(Ergebnis: W(-1|0); $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$)
(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

2.4 Zeichnen die den Graphen G_f im Bereich $-4{,}5 \le x \le 2{,}5$ und die Wendetangente im Bereich $-2 \le x \le 0{,}5$ unter Verwendung der bisher ermittelten Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem.
(Maßstab 1 LE = 1 cm)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Prüfungsaufgaben 2(5)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktionen

Lernmittel: Algebra (AL); Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0 Gegeben ist die Funktionsgleichung p einer ganzrationalen Funktion 2. Grades mit $p(x) = -x^2 + 3x + 4$. Der Graph dieser Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G(p) bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte von G(p) mit den Koordinatenachsen.
(Ergebnis: $S_y(0|4)$; $N_1(-1|0)$; $N_2(4|0)$)
(AL Kapitel 4; FS S. 24 ff.)

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen G(p) im Punkt P(0|f(0)).
(Ergebnis: $y = 3x+4$)

1.3 Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts des Graphen G(p) an und zeichnen Sie den Graphen G(p) im Bereich $-2 \leq x \leq 5$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein.
Maßstab: 1 LE = 1 cm.
(Ergebnis: $S\left(\frac{3}{2} \,|\, \frac{25}{4}\right)$)

2.0 Die Gerade mit der Gleichung $x = u$, $u \in R$ und $0 \leq u \leq 4$, schneidet die x-Achse im Punkt B und den Graphen G(p) im Punkt C. Die Punkte B und C bilden mit dem Punkt A(-1 | 0) das Dreieck ABC.

2.1 Zeichnen Sie das Dreieck ABC für den Sonderfall u = 2,5 in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.3 ein.

Berechnen Sie den Flächeninhalt A(u) des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von u.

(Ergebnis: $A(u) = \frac{1}{2}(-u^3 + 2u^2 + 7u + 4)$)

2.2 Bestimmen Sie den Wert des Parameters u so, dass der Flächeninhalt A(u) des Dreiecks ABC den absolut größten Wert annimmt.
Berechnen Sie die maximale Flächenmaßzahl.
(Ergebnis: $u = \frac{7}{3}$; $A(\frac{7}{3}) = \frac{250}{27}$)
(Dif Kapitel 9; FS S. 48 ff.)

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Prüfungsaufgaben 3(5)**

J. Dillinger

Ganzrationale Funktion

Lernmittel: Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0	Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{32}x^4-x^2+8$ und $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G(f).	
1.1	Untersuchen Sie G(f) auf Symmetrie zum Koordinatensystem und berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.	4
1.2	Ermitteln Sie Lage und Art der Extremalpunkte von G(f).	4
1.3	Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen G(f).	3
1.4	Zeichnen Sie den Graphen G(f) unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1cm.	4
1.5	Geben Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen G(f) im Punkt P(4; f(4)) an.	2
1.6.0	Weiterhin sind die Parabeln p mit der Gleichung $y = 0{,}5x^2 + 8$ gegeben.	
1.6.1	Zeichnen Sie die Parabel p in das Koordinatensystem von Aufgabe 1. 4 ein und kennzeichnen Sie die mit dem bestimmten Integral $\int_0^4 \left(p_{-0,5}(x)-f(x)\right)dx$ festgelegte Fläche.	3
1.6.2	Berechnen Sie die Maßzahl der gekennzeichneten Fläche.	5
	Summe:	25

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

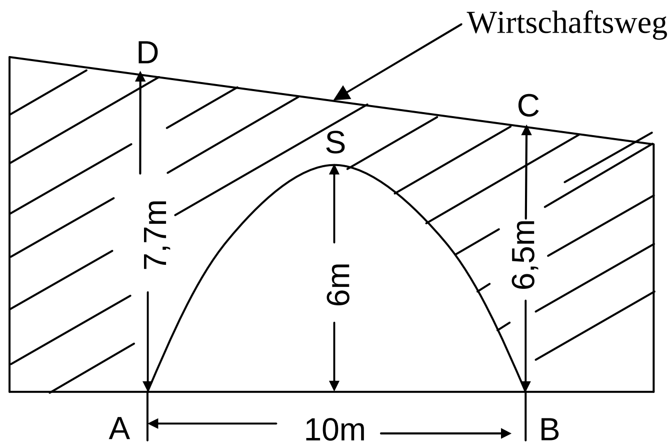
MATHEMATIK

Themenbereich **Prüfungsaufgaben 4(5)**

J. Dillinger

Anwendungsbezogene Aufgabe

Lernmittel: Differentialrechnung (Dif); Formeln und Begriffe (FS)

1.0	Der Brückenbogen einer Brücke für einen stark abfallenden Wirtschaftsweg g über eine Straße hat die Form einer nach unten geöffneten Parabel p (siehe Skizze).  In den Punkt A wird der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt. Der Punkt B liegt auf der x-Achse. Die Punkte D und C liegen senkrecht über A bzw. B. Bei den folgenden Rechnungen wird auf die Mitführung der Einheiten verzichtet.	
1.1	Stellen Sie die Funktionsgleichungen der den Brückenbogen beschreibenden Parabel p und der dem Verlauf des Wirtschaftsweges entsprechenden Geraden g auf. Entnehmen Sie dazu die benötigten Maßzahlen der Skizze. (Ergebnis: $p(x) = -\frac{6}{25}x^2 + \frac{12}{5}x$; $g(x) = -0{,}12x + 7{,}7$)	6
1.2	Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden t, die zur Geraden g parallel liegt und die Parabel p berührt, sowie den Berührpunkt E.	6
1.3	Die Gerade n mit der Steigung $m_n = \frac{25}{3}$ steht auf der Geraden t senkrecht und geht durch den Punkt E(5,25; 5,985). Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden n.	3
1.4	Berechnen Sie den Abstand d der Geraden g von der Tangente t.	5
1.5	Ein LKW von 2,50 m Breite und 3,84 m Höhe mit rechtwinkligem Querschnitt möchte durch den Brückenbogen fahren. Berechnen Sie, welchen Abstand s der LKW vom linken Straßenrand (Punkt A) mindestens einhalten muss, damit das Fahrzeug den Brückenbogen mit seiner Außenkante nicht berührt.	5
	Summe:	25

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL Drittes Trimester

MATHEMATIK

Themenbereich **Prüfungsaufgaben 5(5)**

J. Dillinger

Vektorrechnung und Analytische Geometrie

Lernmittel: Vektorrechnung und Analytische Geometrie (VuG); Formel und Begriffe (FS)

1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des R^3 sind die Punkte A(-1;2;0), B(2;2;9) und C(1;1;4,5) gegeben.	
1.1	Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass die Punkte A, B, C, D ein Parallelogramm bilden.	3
1.2.0	Gegeben sind nun die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -11,5 \end{pmatrix}$.	
1.2.1	Zeigen Sie, dass gilt: $A \in g$	2
1.3	Zeigen Sie, dass die Geraden g und h sich im Punkt S(4;-1;-7) schneiden.	3
1.4	Berechnen Sie den Schnittwinkel.	4
1.5	Das Parallelogramm ABCD legt die Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Normalenform. (mögliche Lösung: $6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$)	5
1.6	Ermitteln Sie den Abstand des Punktes S von der Ebene E.	3
1.7	Das Parallelogramm ABCD bildet mit dem Punkt S als Spitze eine schiefe Pyramide. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide.	5
	Summe:	25

MATHEMATIK	**Arbeitsbogen**
TELEKOLLEG MULTIMEDIAL	**Vektoren und Analytische Geometrie**
	J. Dillinger

Name: ………………………………………………………………………
Gruppe: …………………………………..

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3 ; 6 ; 0)$, $B_k(0 ; 6 ; k)$ mit $k \in IR$ und $C(2 ; -2 ; 5)$ sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in$ IR gegeben.

1.1 Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB_k}$ und $\overrightarrow{CB_k}$.

1.2 Zeigen Sie, dass es keinen Wert für k gibt, für den die Vektoren $\overrightarrow{AB_k}$ und $\overrightarrow{CB_k}$ linear abhängig sind.

1.3 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass das zugehörige Dreieck AB_kC bei B_k einen rechten Winkel hat.
(Teilergebnis: $k = 3$)

2.0 Für folgende Berechnungen gelte $k = 3$.

2.1 Berechnen Sie die Länge der Vektoren $\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{CB_3}$ und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AB_3C.

2.2 Das Dreieck AB_3C wird zum Rechteck AB_3CD ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.

2.3 Die Punkte A und C legen eine Gerade h fest. Geben Sie die Gleichung der Geraden h an.

2.4 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h und geben Sie, falls vorhanden, den Schnittpunkt S der beiden Geraden an.

2.5 Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden g und h.

3.0 Die Punkte A, B_3 und C legen die Ebene E fest.

3.1 Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und Normalenform an.
(Mögliches Ergebnis: E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$)

3.2 Geben Sie eine parallele Ebene F zu E an, die durch den Ursprung geht.

3.3 Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g.

MATHEMATIK **Arbeitsbogen**

TELEKOLLEG MULTIMEDIAL **Kurvendiskussion**

J. Dillinger

Name: ………………………………………………………………………….
Gruppe: ……………………………

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_{a,b}(x) = \frac{1}{8}(x^3 + ax^2 + b)$; $a,b \in IR$.

Der Graph der Funktion $f_{a,b}$ wird mit $G(f_{a,b})$ bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie die Werte a und b so, dass der Punkt P(2|0) auf $G(f_{a,b})$ liegt und der Graph im Punkt P die Steigung -1,5 hat.

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = \frac{1}{8}(x^3 + ax - 16)$; $a \in IR$.

Der Graph der Funktion f_a wird mit $G(f_a)$ bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie a so, dass der Graph $G(f_a)$ bei x = 2 eine waagerechte Tangente hat.

2.2 Für a = -12 ergibt sich die Funktion f_{-12} mit der Gleichung

$f_{-12}(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x - 16)$.

2.2.1 Ermitteln Sie die Nullstellen des Graphen $G(f_{-12})$.

2.2.2 Berechnen Sie die relativen Extremwerte des Graphen $G(f_{-12})$ nach Lage und Art und geben Sie deren Koordinaten an.

2.2.3 Zeigen Sie, dass die Funktion f_{-12} die Wendestelle $x_w = 0$ hat.

2.2.4 Geben Sie die Gleichung der Wendetangente w_t an.

Name: ……………………………………………………………..
Gruppe: ………………………………

1.0 Ein Betrieb stellt elektronische Bauteile her. Für den Produktionsbereich von Halbleitern ergibt sich folgende Erlösfunktion:

e: $x \to e(x) = 15x + \frac{16}{3}$.

Dabei stellt x die Mengeneinheit (ME) dar (1 ME = 1000 Stück Halbleiter).
Die Kosten für die Produktion wurden durch eine betriebliche Untersuchung ermittelt.
Als Ergebnis der Untersuchung ergab sich die Kostenfunktion k mit der Gleichung

k: $x \to k(x) = \frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 27x + 1$.

Die Erlösfunktion e und die Kostenfunktion k ergeben zusammengefasst die Gewinnfunktion
g: $x \to g(x) = e(x) - k(x)$.

Die Gewinnfunktion gilt für die Bereiche $0 \le x \le 8{,}5$ (Mengeneinheiten).

1.1 Geben Sie die Gleichung der Gewinnfunktion g an.

1.2 Bei 0,5 Mengeneinheiten wird weder Gewinn noch Verlust gemacht (Nullstelle der Funktion g).Untersuchen Sie die Funktion g auf weitere solche Stellen.

1.3 Für welche produzierten Mengeneinheiten ist der Gewinn bzw. der Verlust am größten? Geben Sie jeweils die Koordinaten für den maximalen Gewinn bzw. den größten Verlust an.

1.4 Berechnen Sie den Wendepunkt der Gewinnfunktion g und geben Sie die Bedeutung des Wendepunktes bezüglich der vorliegenden Problematik an.

1.5 Zeichnen Sie den Graphen G(g) der Gewinnfunktion g in ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Bereich $0 \le x \le 8{,}5$ und verwenden Sie folgenden Maßstab:
x- Achse (ME) 1 ME = 1 cm
y-Achse (WE) 10 WE = 1 cm

(ME = Mengeneinheiten; WE = Währungseinheiten)

Machen Sie aufgrund des Verlaufs des Graphen G(g) der Gewinnfunktion g eine Aussage bezüglich Gewinn und Verlust.

1.6 Schraffieren Sie den Verlustbereich und deuten Sie das Intervall.

MATHEMATIK	**Arbeitsbogen**
TELEKOLLEG MULTIMEDIAL	**Prüfungsaufgaben**

J. Dillinger

Name: …………………………………………………………………………….
Gruppe: ……………………………

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_a(x) = a \cdot x^3 - \frac{1}{a} \cdot x^2 \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Der Graph einer solchen Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem heißt $G(f_a)$.

1.1 Bestimmen Sie den Wert a so, dass der Graph $G(f_a)$ bei $x = \frac{8}{3}$ einen relativen Extremwert besitzt.

2.0 Die zur Funktion f gehörende Funktionsgleichung lautet nun: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$.

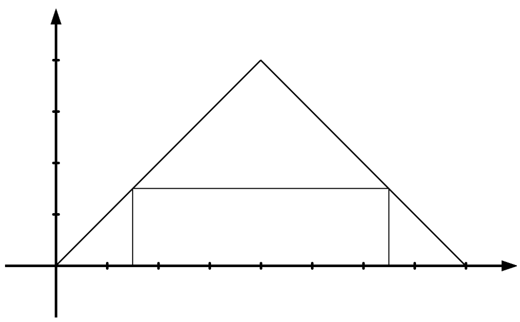
2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit den Koordinatenachsen.

2.2 Untersuchen Sie den Graphen G der Funktion f auf relative Extremwerte nach Lage und Art und geben Sie deren Koordinaten an.

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G.

2.4 Zeichnen Sie den Graphen G im Bereich $-1 \leq x \leq 5$ unter Verwendung der bisher ermittelten Ergebnisse.
Maßstab: 1 LE = 1 cm.

3.0 Der Dachboden eines 10 m langen Hauses soll ausgebaut werden. Der Querschnitt des Dachbodens ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Breite 8 m und der Höhe 4 m. In den Dachboden soll ein Raum mit rechteckigem Querschnitt eingepasst werden (siehe Skizze). Für Berechnungen sind die Längeneinheiten wegzulassen.



3.1 Berechnen Sie die Maßzahl des ursprünglichen Dachbodenvolumens.

3.2 Berechnen Sie das Volumen des geplanten Raumes in Abhängigkeit von x.
(Ergebnis: $V(x) = -5x^2 + 40x$)

3.3 Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich D_V an.

3.4 Berechnen Sie die Breite x und die Höhe h so, dass das Volumen V(x) maximal wird, und geben Sie das maximale Volumen an.