TELEKOLLEG MULTIMEDIAL

ANALYSIS
Differenzialrechnung
Kapitel 1–5

Ferdinand Weber

BRmedia VERLAG

Inhaltsverzeichnis

Jedes Kapitel beginnt mit der Seitenzahl 1.

1. Das Tangentenproblem

Vor der Sendung

In Anwendungsgebieten der Wirtschaft, der Technik, der Naturwissenschaften ist es für Prognosen bei Prozessen und Abläufen oft wichtig zu wissen, wie sich eine Größe im weiteren Verlauf des Prozesses ändern wird. Häufig wird von einer Tendenz gesprochen: Tendenz schwach fallend, gleichbleibend, stark ansteigend. Beispiele sind die Preisentwicklung, die Arbeitslosenzahl, Luftdruckschwankungen, der Pegelstand eines Flusses, die Zahl der Infektionen an einem bestimmten Virus. Bei solchen funktionalen Zusammenhängen sind begründete Vorhersagen nur möglich, wenn außer dem Messwert selbst auch das Änderungsverhalten der Funktion bekannt ist.

Die Frage nach dem Änderungsverhalten einer Funktion an einer Stelle führt mathematisch zu der Kernfrage der Differenzialrechnung: Wie groß ist die Steigung des Graphen einer Funktion in einem bestimmten Punkt? Mit algebraischen Mitteln lässt sich das nicht so einfach beantworten. Es müssen ein neues Verfahren entwickelt und neue Begriffe eingeführt werden.

Den Begriff "Steigung" haben Sie im Zusammenhang mit linearen Funktionen und deren Graphen (Geraden) kennengelernt (siehe Begleitmaterial zum Telekolleg "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie", Kapitel 7). Darauf baut diese Lektion auf. Sie sollten deshalb Ihr Wissen über lineare Funktionen und die Steigung von Geraden jetzt wiederholen.

Übersicht

1. Es wird erarbeitet, was man unter der **Steigung eines Graphen** in einem Punkt versteht, wenn dieser keine Gerade, sondern eine gekrümmte Linie ist.

2. Ein **Annäherungsprozess** hilft weiter. Um den Prozess mathematisch exakt fassen zu können, wird – zunächst anschaulich – ein neuer Begriff eingeführt werden, der für die gesamte Differenzialrechnung und darüber hinaus eine zentrale Bedeutung hat: der **Grenzwert**. Auf der Grundlage dieses Begriffs wird ein Verfahren erarbeitet, das die Berechnung der Steigung eines Graphen in einem Punkt ermöglicht.

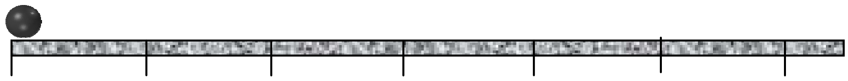
3. Es folgt die **Anwendung des neuen Verfahrens** auf die Funktionen $y=x^2$ und $y=x^3$. Die Steigung dieser Graphen in verschiedenen Punkten wird bestimmt.

4. Schließlich erfolgt eine **Verallgemeinerung** so, dass man mithilfe einer Formel die Steigung der Graphen dieser Funktionen in jedem *beliebigen* Punkt einfach berechnen kann.

1.1 Steigung einer Geraden – Steigung eines Graphen

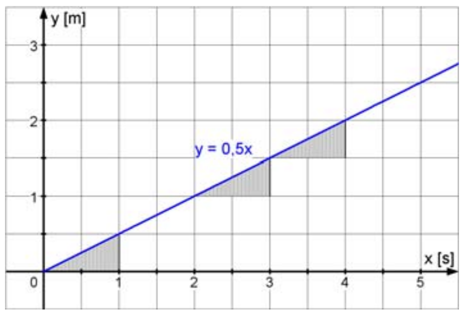
Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Eine Kugel rollt auf einer Bahn mit einer konstanten Geschwindigkeit. In regelmäßigen Zeitabständen wird die Entfernung der Kugel von ihrem Ausgangspunkt gemessen. Das Ergebnis ist in folgender Tabelle dargestellt.



x [s]	0	1	2	3	4	5	6
y [m]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Man erkennt aus der Tabelle, dass die Kugel in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wege zurücklegt. Von Sekunde zu Sekunde wird der zurückgelegte Weg um 0,5 m größer. Wenn ein Körper in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, sagt man in der Physik: Der Körper bewegt sich *gleichförmig*.



Das Diagramm rechts zeigt, wie viel Meter die Kugel nach einer bestimmten Zeit insgesamt zurückgelegt hat. Auf der horizontalen Achse ist die Zeit x mit der Einheit "Sekunden" abgetragen, auf der vertikalen Achse die Entfernung y vom Ausgangspunkt mit der Einheit "Meter".[1]

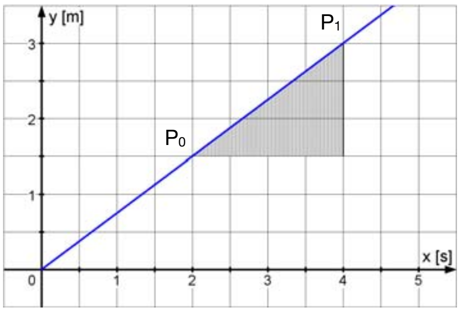
Die Zuordnung "*Zeit→Weg*" ist eine lineare Funktion. Der Graph der Funktion ist eine Gerade. Auch am Graphen erkennt man, dass die Kugel pro Sekunde 0,5 m zurücklegt. Die Gleichung der Geraden lautet: $y = 0{,}5x$. Der Zahlenwert 0,5 gibt die Steigung der Geraden an. Die Steigung der Geraden entspricht der Geschwindigkeit der Kugel: $0{,}5\frac{m}{s}$.

Wenn Sie Ihr Wissen über lineare Funktionen, über Gleichung und Steigung einer Geraden auffrischen wollen, können Sie die entsprechenden Informationen im Begleitmaterial zum Telekolleg "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie" im Abschnitt 7.2 (Seite 82) nachlesen.

[1] In der Physik wird die Zeit in der Regel mit der Variablen t und der Weg mit der Variablen s bezeichnet.

Bestimmung der Steigung einer Geraden

Das Diagramm rechts stellt eine andere gleichförmige Bewegung dar. Um die Geschwindigkeit des Körpers zu bestimmen, muss man die Steigung der Geraden ermitteln.



Dies kann folgendermaßen geschehen:

- Man wählt zwei beliebige Punkte auf der Geraden.
- Man bildet die Differenz der y-Werte und die Differenz der x-Werte.
- Man bildet den Quotienten der y-Differenzen durch die x-Differenzen.

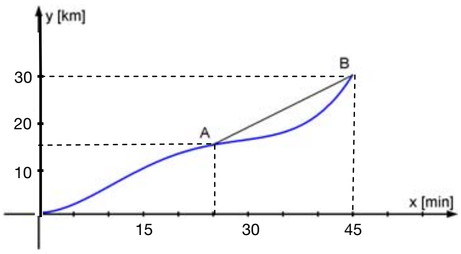
	zwei Punkte	Differenz der y-Werte	Differenz der x-Werte	Steigung
Beispiel:	$P_0(2 \mid 1{,}5)$; $P_1(4 \mid 3)$	$3 - 1{,}5 = 1{,}5$	$4 - 2 = 2$	$\frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$
allgemein:	$P_0(x_0 \mid y_0)$, $P_1(x_1 \mid y_1)$	$y_1 - y_0$	$x_1 - x_0$	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Im Beispiel ist die Steigung der Geraden 0,75. Die Geschwindigkeit des Körpers beträgt also $0{,}75\,\frac{m}{s}$.

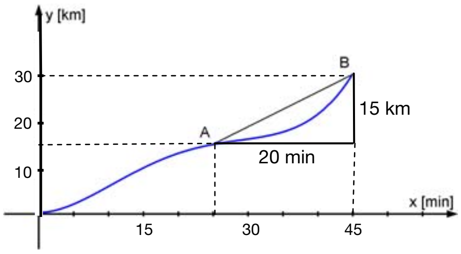
Eine Gerade durch die Punkte $P_0(x_0 \mid y_0)$ und $P_1(x_1 \mid y_1)$ hat die Steigung: $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Mittlere Geschwindigkeit

Die Fahrt mit dem Auto ist ein alltägliches Beispiel für eine Bewegung, bei der die Geschwindigkeit *nicht* konstant ist. Der Graph einer solchen Autofahrt könnte zum Beispiel so aussehen, wie im rechten Bild dargestellt. Aufgrund des Graphen lässt sich die Fahrt wie folgt beschreiben: Am Anfang steigt der Graph langsam an, dann immer stärker. Das heißt, der Wagen wurde immer schneller. Dann flacht der Graph ab, die Geschwindigkeit wird wieder kleiner. Nach 25 Minuten, also ab dem Punkt A, nimmt die Geschwindigkeit des Autos wieder zu. Vielleicht hat der Fahrer jetzt die Autobahn erreicht.

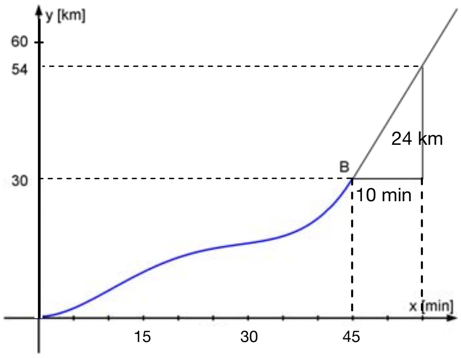


Weil ihn die Geschwindigkeit, die er zwischen A und B gefahren ist, interessiert, dividiert der Fahrer die Anzahl der Kilometer durch die Zeit, die er für die Strecke benötigt hat: $\frac{15\text{ km}}{20\text{ min}} = \frac{15\text{km} \cdot 3}{60\,\text{min}} = 45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Das ist die **mittlere Geschwindigkeit** (Durchschnittsgeschwindigkeit) zwischen A und B. Im Punkt A ist die tatsächliche Geschwindigkeit kleiner als die mittlere Geschwindigkeit, im Punkt B größer.



Momentangeschwindigkeit – Steigung eines Graphen in einem Punkt

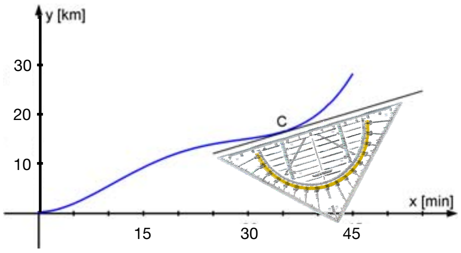
Welches ist aber die tatsächliche Geschwindigkeit des Autos im Punkt B? Die tatsächliche Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, die der Tachometer anzeigt. Man nennt sie die **Momentangeschwindigkeit** im Punkt B.



Nehmen wir einmal an, das Auto würde ab Punkt B mit konstanter Geschwindigkeit weiterfahren. Dann würde der Graph im Punkt B in eine Gerade übergehen, und zwar ohne Knick. Die Momentangeschwindigkeit im Punkt B würde "konserviert". An der Geraden kann man ablesen: $\frac{24\text{ km}}{10\text{ min}} = \frac{24\text{ km}\cdot 6}{60\text{ min}} = 144\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Dies ist die Momentangeschwindigkeit im Punkt B.

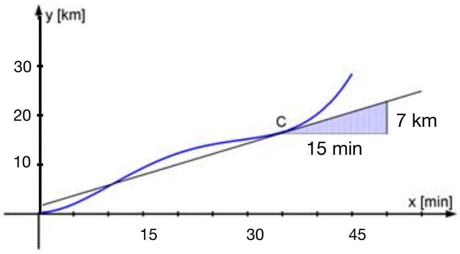
Diese Überlegungen eröffnen uns eine Möglichkeit, graphisch die Momentangeschwindigkeit in einem beliebigen anderen Punkt zu bestimmen, zum Beispiel im Punkt C.



Man zeichnet, so gut es geht, eine Tangente an den Graphen.

Anschließend bestimmt man die Steigung der Tangente.

$\frac{7\text{ km}}{15\text{ min}} = \frac{7\text{ km}\cdot 4}{60\text{ min}} = 28\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$



Das lässt sich verallgemeinern:

Unter der **Steigung eines Graphen in einem Punkt P** versteht man die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt P.

Aufgaben zu 1.1

1. Bestimmen Sie die Steigung der Geraden, die durch folgende Punkte geht:
a) P(1|7) ; Q(–1|3) b) P(–2|1) ; Q(2|–7) c) P(4,5|1,6) ; Q(2,3|7,1)

2. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch folgende Punkte geht:
a) P(1|1) ; Q(4|7) b) P(2|1) ; Q(–3|6) c) P(0|0) ; Q(–2|6)

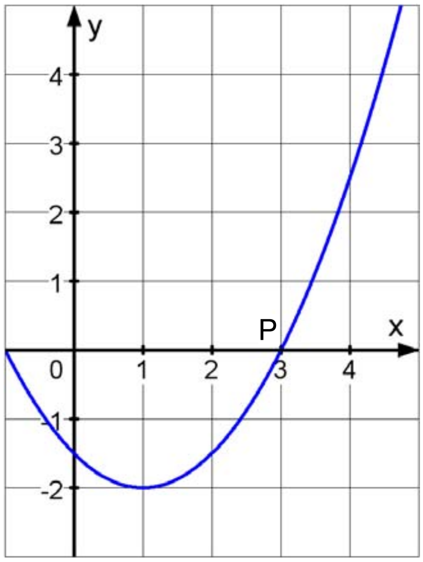
3. Ein Pkw hat nach 15 Minuten 20 km zurückgelegt (Punkt A) und nach insgesamt 35 Minuten eine Gesamtstrecke von 50 km (Punkt B).

a) Wie groß war die mittlere Geschwindigkeit vom Start bis zum Punkt A?

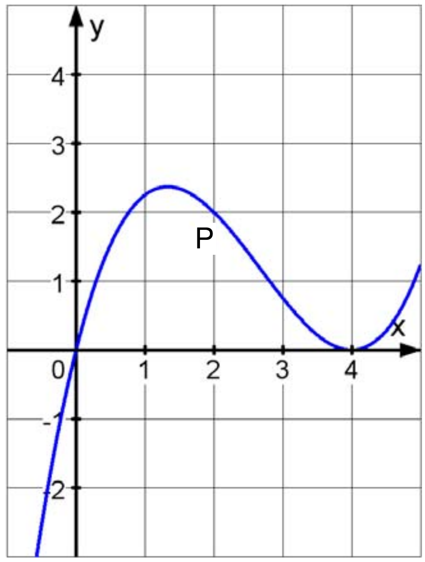
b) Wie groß war die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Punkten A und B?

4. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen im Punkt P geometrisch.

a) P(3|0)



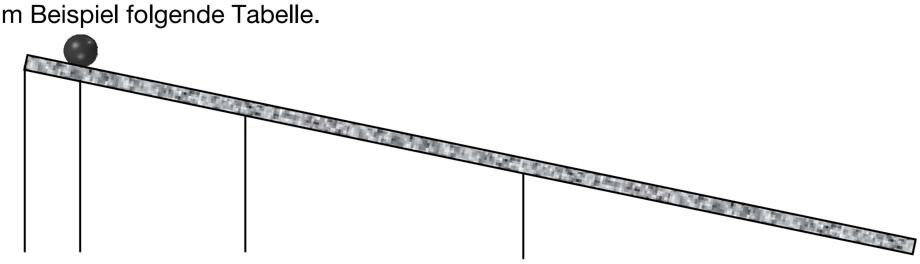
b) P(2|2)



1.2 Rechnerische Bestimmung der Steigung eines Graphen in einem Punkt – Grenzwert

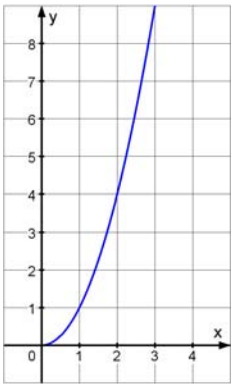
Steigung der Normalparabel in einem Punkt

Im folgenden Beispiel rollt eine Kugel auf einer schiefen Ebene. Es ist sofort klar, dass die Geschwindigkeit bei dieser Bewegung nicht konstant ist. Sie nimmt ständig zu. Misst man in Abständen von 1 Sekunde den zurückgelegten Weg der Kugel, so ergibt sich zum Beispiel folgende Tabelle.



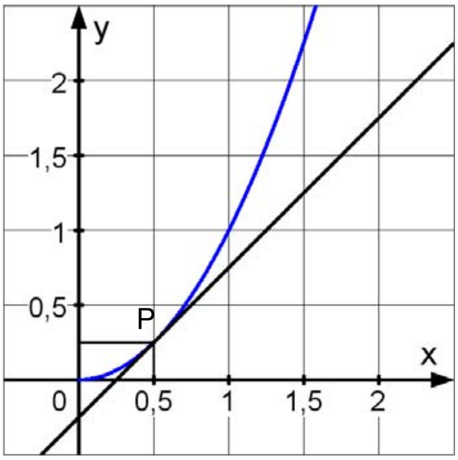
x [s]	0	1	2	3	4
y [m]	0	1	4	9	16

Der zugehörige Graph ist eine Parabel, und zwar in unserem Beispiel die Normalparabel[2]. Die Gleichung der Normalparabel lautet $y=x^2$. Je steiler der Graph ansteigt, desto größer ist die Geschwindigkeit der Kugel. Will man die Momentangeschwindigkeit der Kugel in einem Punkt wissen, muss man die Steigung der Tangente an die Parabel in diesem Punkt bestimmen.



Wie groß ist zum Beispiel die Steigung der Parabel im Punkt P(0,5 | 0,25)?

Wie man die Aufgabe zeichnerisch löst, wissen Sie bereits. Leider erhält man bei der zeichnerischen Lösung keinen genauen Wert. Die rechnerische Lösung ist aber nicht ohne Weiteres möglich. Man kennt nämlich von der Tangente nur einen einzigen Punkt: P(0,5|0,25). Um die Steigung einer Geraden zu bestimmen, benötigt man aber zwei Punkte. Was ist zu tun?



Um das Problem zu lösen, hat man sich ein Verfahren ausgedacht, dem man auf den ersten Blick gar nicht ansieht, dass man damit zu dem gewünschten Ziel kommt.

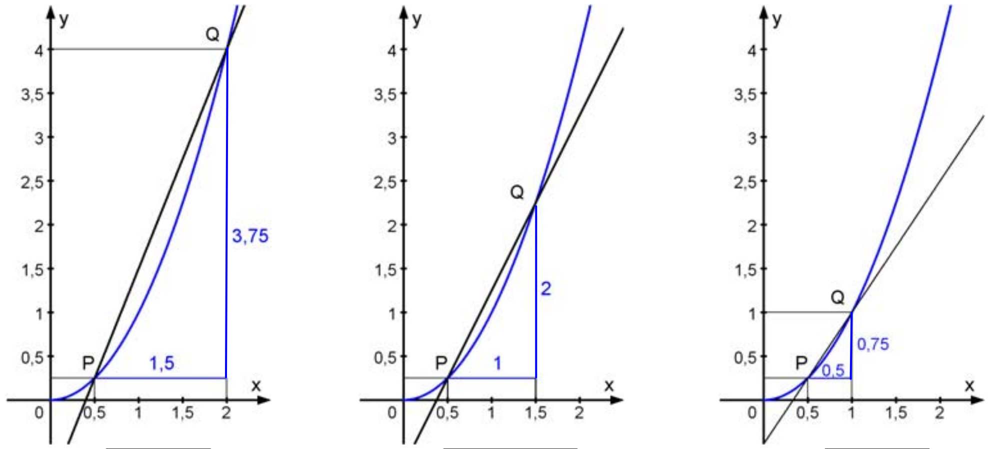
[2] Wenn Sie Ihr Wissen über quadratische Funktionen und Parabeln auffrischen wollen, können Sie die entsprechenden Informationen im Begleitmaterial zum Telekolleg "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie" im Kapitel 9 (Seite 102 ff.) nachlesen.

Berechnung der Steigung der Normalparabel in einem Punkt

Man geht von einer Geraden aus, die die Parabel zweimal schneidet, einer sogenannten Sekante. Im Bild links geht die Sekante durch die Punkte P(0,5|0,25) und Q(2|4). Die Steigung dieser Sekante ist: $\frac{4-0{,}25}{2-0{,}5}=\frac{3{,}75}{1{,}5}=2{,}5$.

Jetzt wählt man einen anderen Punkt Q auf der Normalparabel, und zwar einen, der näher bei P liegt, zum Beispiel (1,5|2,25) (Bild Mitte). Die Steigung dieser Sekante ist: $\frac{2{,}25-0{,}25}{1{,}5-0{,}5}=\frac{2}{1}=2$.

Als Nächstes wählt man für Q beispielsweise die Koordinaten (1|1) (Bild rechts). Die Steigung dieser Sekante ist $\frac{1-0{,}25}{1-0{,}5}=\frac{0{,}75}{0{,}5}=1{,}5$.

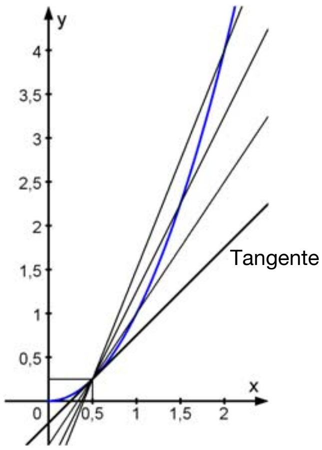


Q(2|4)
m = 2,5

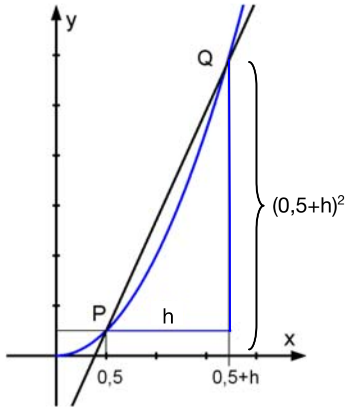
Q(1,5|2,25)
m = 2

Q(1|1)
m = 1,5

Wenn Q auf der Normalparabel immer näher an P heranrückt, nähern sich die Sekanten immer mehr der Tangente, und die Steigungen der Sekanten nähern sich immer mehr der Steigung der Tangente.



Diese geometrischen Überlegungen der Annäherung bilden die Grundlage für eine rechnerische Bestimmung der Steigung der Tangente im Punkt $P(0{,}5|0{,}5^2)$. Ein solches rechnerisches Verfahren wollen wir jetzt erarbeiten.



Weil der Punkt Q auf der Normalparabel auf P "zuwandern" soll, beschreiben wir seine Koordinaten mit einer Variablen. Der x-Wert von Q soll um h größer sein als der x-Wert von P. Die x-Koordinate von Q heißt also $x_Q=0{,}5+h$. Die y-Koordinate ist dann $y_Q=(0{,}5+h)^2$. Q liegt ja auch auf der Normalparabel $y=x^2$.

Die Steigung der Sekante ist dann

$$\frac{(0{,}5+h)^2-0{,}5^2}{(0{,}5+h)-0{,}5}=\frac{0{,}5^2+2\cdot 0{,}5\cdot h+h^2-0{,}5^2}{h}=\frac{h+h^2}{h}.$$

Nun stellen wir uns vor, dass Q auf P zuwandert. h wird dann immer kleiner. Der Term für die Steigungen der Sekanten nähert sich dabei immer mehr der Steigung der Tangente. Aber wie groß ist diese Steigung, wenn h gegen 0 geht?

Eine einfache Überlegung hilft uns weiter. Wir klammern h aus: $\frac{h+h^2}{h}=\frac{h(1+h)}{h}$. Solange h von 0 verschieden ist, dürfen wir den Term durch h kürzen: $\frac{h(1+h)}{h}=1+h$ $(h\neq 0)$. Am Term 1+h erkennt man sofort: Wenn h gegen 0 geht, so nähert sich der Wert des Terms immer mehr der 1.

Man sagt: 1 ist der **Grenzwert** des Terms für h gegen 0 und schreibt[3] dafür:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(1+h)=1$$

Der Grenzwert gibt die gesuchte **Steigung der Tangente** an die Normalparabel im Punkt $P(0{,}5\mid 0{,}25)$ an.

Aufgaben zu 1.2

1. Eine Sekante schneidet die Normalparabel $y=x^2$ im Punkt $P(1|1)$ und ferner in einem weiteren Punkt $Q_1(2|4)$. Berechnen Sie die Sekantensteigung m_1.
2. Berechnen Sie auch für die Sekanten durch P und Q_2 bzw. Q_3 bzw. Q_4 jeweils die Steigungen m_2, m_3, m_4.

Q_2 (1,5|2,25)	Q_3 (1,1|1,21)	Q_4 (1,01|1,0201)
m_2 =	m_3 =	m_4 =

3. Stellen Sie eine Vermutung auf, welchem Wert sich die Sekantensteigungen nähern, wenn Q auf der Parabel immer näher an $P(1|1)$ heranrückt.

---

[3] $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h+h^2}{h}$ wird gelesen: Limes von $\frac{h+h^2}{h}$ für h gegen 0.

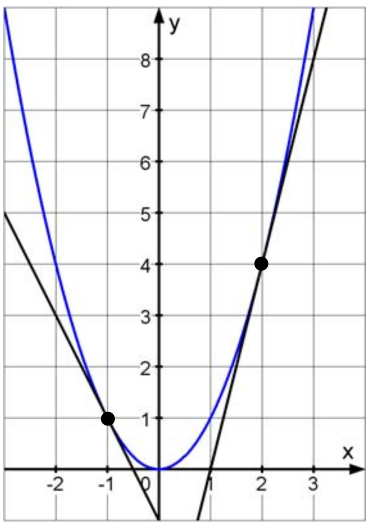
1.3 Weitere Beispiele für die Berechnung von Steigungen

In den folgenden Beispielen werden die Steigungen der Graphen von $y=x^2$ und $y=x^3$ in verschiedenen Punkten P berechnet.

Gesucht: Steigung von $y=x^2$ im Punkt P	**P(2|4)**	**P(–1|1)**
1) Wahl eines zweiten Punkts Q	$Q(2+h \mid (2+h)^2)$	$Q(-1+h \mid (-1+h)^2)$
2) Differenz der y-Werte von Q und P	$(2+h)^2 - 4$	$(-1+h)^2 - 1$
3) Differenz der x-Werte von Q und P	$(2+h) - 2$	$(-1+h) - (-1)$
4) Quotient: $\frac{y\text{–Differenz}}{x\text{–Differenz}}$	$\frac{(2+h)^2-4}{(2+h)-2} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h \quad (h\neq 0)$	$\frac{(-1+h)^2-1}{(-1+h)+1} = \frac{1-2h+h^2-1}{h} = \frac{-2h+h^2}{h} = \frac{h(-2+h)}{h} = -2+h \quad (h\neq 0)$
5) Grenzwert für h → 0	$\lim\limits_{h\to 0}(4+h) = 4$	$\lim\limits_{h\to 0}(-2+h) = -2$

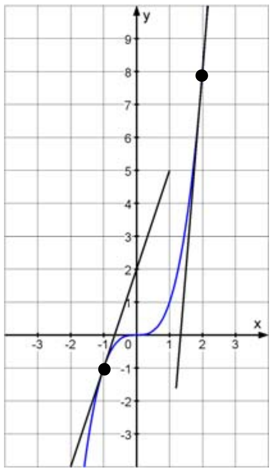
Im Punkt (2|4) ist die Steigung der Normalparabel: **m = 4**, im Punkt (-1|1) ist sie: **m = –2**.

Am Graphen findet man bestätigt, dass die Steigung in (2|4) positiv ist: Die Tangente steigt. In (-1|1) ist sie negativ: Die Tangente fällt.



Gesucht: Steigung von $y=x^3$ im Punkt P	P(2|8)	P(–1|–1)
1) Wahl eines zweiten Punkts Q	$Q(2+h \mid (2+h)^3)$	$Q(-1+h \mid (-1+h)^3)$
2) Differenz der y-Werte von Q und P	$(2+h)^3 - 8$	$(-1+h)^3 - (-1)$
3) Differenz der x-Werte von Q und P	$(2+h) - 2$	$(-1+h) - (-1)$
4) Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{(2+h)^3-8}{(2+h)-2} =$ $= \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}$ $= \frac{12h+6h^2+h^3}{h}$ $= \frac{h(12+6h+h^2)}{h}$ $= 12+6h+h^2 \quad (h \neq 0)$	$\frac{(-1+h)^3+1}{(-1+h)+1} =$ $= \frac{(-1)^3+3h-3h^2+h^3+1}{h}$ $= \frac{3h-3h^2+h^3}{h}$ $= \frac{h(3-3h+h^2)}{h}$ $= 3-3h+h^2 \quad (h \neq 0)$
5) Grenzwert für h → 0	$\lim\limits_{h\to 0}(12+6h+h^2) = 12$	$\lim\limits_{h\to 0}(3-3h+h^2) = 3$

Im Punkt (2|8) ist die Steigung des Graphen von $y=x^3$: **m = 12.**



Im Punkt (-1|-1) ist die Steigung des Graphen von $y=x^3$: **m = 3.**

Aufgaben zu 1.3

1. Bestimmen Sie nach dem oben dargestellten Verfahren die Steigung des Graphen von $y=x^2$ im Punkt P(1|1).

2. Bestimmen Sie nach dem oben dargestellten Verfahren die Steigung des Graphen von $y=x^3$ im Punkt P(1|1).

1.4 Berechnung der Steigung des Graphen einer Funktion in einem beliebigen Punkt[4]

Um die Steigung eines Graphen nicht in jedem Punkt einzeln berechnen zu müssen, führt man das Verfahren allgemein für einen beliebigen Punkt mit den Koordinaten $(x_0|y_0)$ aus.

Gesucht: Steigung von y=f(x) im Punkt P(x_0|y_0)	**$f(x) = x^2$ P(x_0|x_0^2)**	**$f(x) = x^3$ P(x_0|x_0^3)**
1) Wahl eines zweiten Punkts Q	$Q(x_0+h \mid (x_0+h)^2)$	$Q(x_0+h \mid (x_0+h)^3)$
2) Differenz der y-Werte von Q und P	$(x_0+h)^2 - x_0^2$	$(x_0+h)^3 - x_0^3$
3) Differenz der x-Werte von Q und P	$(x_0+h) - x_0$	$(x_0+h) - x_0$
4) Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{(x_0+h) - x_0} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = \frac{h(2x_0 + h)}{h} = 2x_0 + h \quad (h \neq 0)$	$\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{(x_0+h) - x_0} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \frac{h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 \quad (h \neq 0)$
5) Grenzwert für h → 0	$\lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$	$\lim_{h\to 0}(3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$

Die Steigung des Graphen der Funktion $y=x^2$ im Punkt $(x_0|x_0^2)$ ist: $m = 2x_0$.

Die Steigung des Graphen der Funktion $y=x^3$ im Punkt $(x_0|x_0^3)$ ist: $m = 3x_0^2$.

Beispiel 1: Wie groß ist die Steigung des Graphen von $y=x^2$ im Punkt (1,5 | 2,25)?
Lösung: Man setzt in die Formel $m=2x_0$ für x_0 den Wert 1,5 ein: $m = 2\cdot1{,}5 = 3$.

Beispiel 2: Wie groß ist die Steigung des Graphen von $y=x^3$ im Punkt (-4|-64)?
Lösung: Man setzt in die Formel $m=3x_0^2$ für x_0 den Wert -4 ein: $m = 3\cdot(-4)^2 = 48$.

Beispiel 3: Wie groß ist die Steigung des Graphen von $y=x^2$ im Punkt (0|0)?
Lösung: Man setzt in die Formel $m=2x_0$ für x_0 den Wert 0 ein: $m = 3\cdot0 = 0$.
Steigung 0 bedeutet: Der Graph hat in (0|0) eine waagerechte Tangente.

[4] Zur Schreibweise f(x) (gelesen: f von x) siehe: Begleitmaterial zum Telekolleg "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie", Seite 80.

Aufgaben zu 1.4

1. Bestimmen Sie wie in den Beispielen 1 bis 3 die Steigung der Parabel $y=x^2$ im Punkt $P(-2,5|6,25)$.

2. Bestimmen Sie wie in den Beispielen 1 bis 3 die Steigung des Graphen von $y=x^3$ im Punkt $P(-2|-8)$.

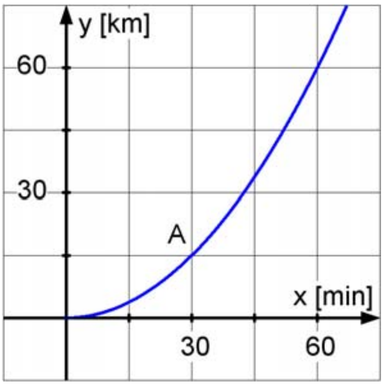
3. In welchem Punkt hat der Graph von $y=x^2$ die Steigung $m=6$?

4. In welchen Punkten hat der Graph von $y=x^3$ die Steigung $m=12$?
(Die Aufgabe hat zwei Lösungen; das heißt, es gibt zwei Punkte, in denen der Graph die Steigung 12 hat.)

5. Wo berührt eine Parallele zu der Geraden $y=-2x-4$ den Graphen von $y=x^2$?

Wiederholungsaufgaben

1. Bestimmen Sie geometrisch, welche Geschwindigkeit der Tachometer eines Autos nach 30 Minuten Fahrzeit (Punkt A) anzeigt.



2. Welche Steigung hat der Graph von $y=x^2$ im Punkt $P(1,2|1,44)$?

3. Zeigen Sie, dass der Graph von $y=x^3$ im Punkt $A(-3|27)$ dieselbe Steigung hat wie im Punkt $B(3|27)$. Wie groß ist diese Steigung?

4. In welchem Punkt hat der Graph von $y=x^2$ die Steigung $m = -4,8$?

5. In welchen Punkten hat der Graph von $y=x^3$ die Steigung $m = 6,75$?

6. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von $y=x^2$ im Punkt $P(3|9)$?

7. Für welche x-Werte haben die Graphen von $y=x^2$ und $y=x^3$ dieselbe Steigung?

2. Grenzwerte bei Funktionen

Vor der Sendung

In Lektion 1 wurde die Steigung der Tangente an einen Graphen in einem Punkt P mithilfe eines Grenzprozesses ermittelt. Man geht von einer Sekante aus, die den Graphen in dem Punkt P und einem weiteren Punkt Q schneidet, und ermittelt die Steigung dieser Sekante. Wenn nun Q auf dem Graphen immer näher an P heranrückt, nähern sich die Sekanten immer mehr der Tangente, und die Steigungen der Sekanten nähern sich immer mehr der Steigung der Tangente. Rechnerisch ergibt sich bei diesem Prozess ein Grenzwert, der die Steigung der Tangente darstellt.

Grenzprozesse und Grenzwerte bei Funktionen spielen in der Differenzialrechnung und in der sich im Telekolleg anschließenden Integralrechnung eine tragende Rolle. Deshalb widmen wir uns in dieser Lektion speziell diesem Thema.

Grenzprozesse sind Ihnen bei Ihrer Beschäftigung mit Funktionen schon früher begegnet, ohne dass sie weiter thematisiert wurden. Anknüpfend an Ihre früheren Erfahrungen werden in dieser Lektion verschiedene Aspekte des Grenzwertbegriffs beleuchtet und Anwendungen im Rahmen von Funktionsbetrachtungen gezeigt.

In Lektion 3 greifen wir die Ergebnisse von Lektion 1 wieder auf und führen diese weiter.

Übersicht

1. Es wird das Verhalten bestimmter Funktionen untersucht, wenn x immer größer wird, und an Beispielen erklärt, was man unter dem **Grenzwert einer Funktion für x gegen unendlich** (bzw. gegen minus unendlich) versteht. Verschiedene Verfahren zur Bestimmung solcher Grenzwerte werden erläutert.

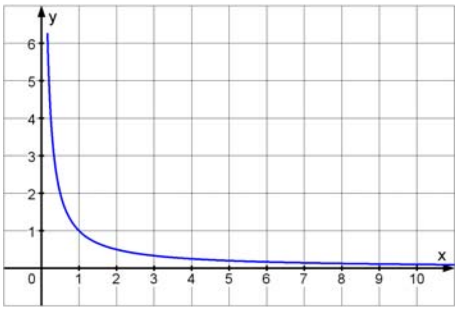
2. Wird die Funktion durch einen Bruchterm angegeben, so weist die Definitionsmenge an den Nullstellen des Nenners Lücken auf. Es wird das Verhalten von solchen Funktionen untersucht, wenn sich x einer **Definitionslücke** x_o nähert.

Man unterscheidet zwei Arten von Definitionslücken: **Pole** und **hebbare Definitionslücken**. An Letzteren wird gezeigt, dass man durch **Grenzwertbildung für x gegen x_o** auch für solche Stellen einen Funktionswert definieren kann.

2.1 Verhalten von Funktionen, wenn x über alle Grenzen wächst – Grenzwerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

Beispiel 1: $y = \frac{1}{x}$ **(x > 0)**

Der Graph der Funktion hat eine interessante Eigenschaft. Mit wachsendem x nähert er sich immer mehr der x-Achse. Wie groß man aber auch x wählt, der Funktionswert ist immer noch ein klein wenig größer als 0 (vgl. nachfolgende Wertetabelle).
Das heißt, zwischen Graph und x-Achse ist immer ein – wenn auch noch so kleiner – Abstand. Der Graph kommt zwar der x-Achse beliebig nahe, aber er erreicht sie nicht. Es findet ein Grenzprozess statt.



Der Graph "schmiegt sich" der x-Achse immer mehr an. Man nennt eine Gerade, der sich ein Graph beliebig nähert, **Asymptote** des Graphen. Im Beispiel 1 ist also die x-Achse Asymptote an den Graphen der Funktion**.**

x	1	2	5	10	100	1000	10000
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$

Anders ausgedrückt: Die Funktionswerte y kommen an 0 beliebig nahe heran, wenn nur x groß genug ist. Man sagt: Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ hat den **Grenzwert** 0, wenn x über alle Grenzen wächst, und schreibt dafür $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.
Man liest: "Limes von 1 durch x gleich 0, wenn x über alle Grenzen wächst."
Oder: "Limes von 1 durch x gleich 0 für x gegen unendlich."

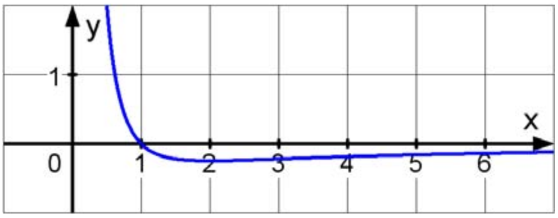
Bei der Redeweise "x geht bzw. strebt gegen unendlich" ist Vorsicht geboten! Man muss sich stets klar darüber sein: Unendlich ist keine Zahl, und ∞ ist kein Zeichen für eine Zahl. Alle Zahlen, und seien sie noch so groß, sind endlich. Mit ∞ kann man nicht rechnen wie mit Zahlen. Die Redeweise "x wächst über alle Grenzen" drückt besser aus, was mit $x \to \infty$ gemeint ist.

Beispiel 2: $y = \frac{1-x}{x^2}$ **(x > 0)**

In der Sendung wurde diese Funktion als weiteres Beispiel besprochen. Auch hier ist der Grenzwert 0, wenn x über alle Grenzen wächst: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-x}{x^2} = 0$. Anschaulich kann man das erkennen, wenn man eine entsprechende Wertetabelle aufstellt.

x	0,5	1	2	5	10	20	50	100
y	2	0	–0,25	–0,16	–0,09	–0,0475	–0,0196	–0,0099

Und hier ist der zugehörige Graph. Er nähert sich "von unten" der x-Achse.



Außer Tabelle und Graph gibt es noch eine weitere Möglichkeit, den Grenzwert 0 für x→∞ zu finden. Man formt den Funktionsterm geeignet um: $\frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Jetzt darf man die Grenzwerte der zwei Brüche $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ einzeln bestimmen und den zweiten vom ersten subtrahieren: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 - 0 = 0$.

Dass $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ ist, haben wir im Beispiel 1 gesehen. Entsprechend kann man sich klar machen, dass auch $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ ist.

Die Grenzwertsätze für x→∞

Im Beispiel 2 haben wir den Grenzwert einer Differenz in zwei Grenzwerte zerlegt, jeden Grenzwert für sich bestimmt und dann den zweiten vom ersten subtrahiert. Dieses Verfahren ist – wie wir sehen werden – sehr nützlich, wenn man einen Grenzwert bestimmen soll, den man nicht intuitiv erkennt.

Die Grundlage für ein solches Vorgehen bilden die sogenannten **Grenzwertsätze**. Sie besagen, dass man unter bestimmten Bedingungen den Grenzwert einer Summe, einer Differenz, eines Produkts oder eines Quotienten in Teilgrenzwerte zerlegen und daraus den gesuchten Grenzwert berechnen darf. Im Telekolleg interessiert uns vor allem das Verfahren, wie man die Grenzwertsätze sinnvoll anwendet. Dies wird im Folgenden an einer Reihe von Beispielen gezeigt. Bei einem streng mathematischen Vorgehen müssen die Grenzwertsätze natürlich zunächst mit allen Voraussetzungen präzise formuliert und dann bewiesen werden.

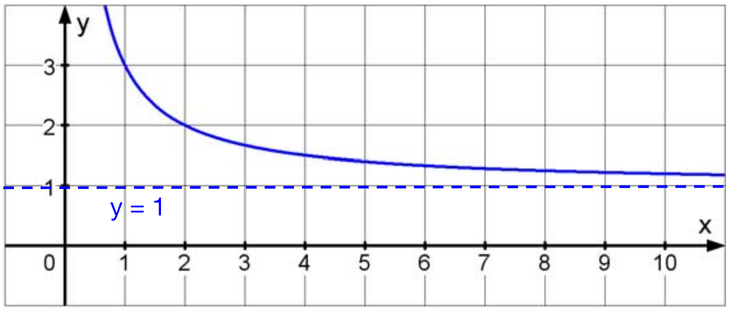
Beispiel 3: $\mathbf{y = \frac{x+2}{x}}$ **(x > 0)**

Wie groß ist der Grenzwert dieser Funktion, wenn x über alle Grenzen wächst?
Um eine Vermutung aufzustellen, kann man entweder für x große Werte einsetzen und jeweils y berechnen (Wertetabelle), oder man besorgt sich den Graphen der Funktion.

x	10	50	100	500	1000	5000	10000
y	1,2	1,04	1,02	1,004	1,002	1,0004	1,0002

Vermutung: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+2}{x} = 1$

Die Vermutung, dass $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+2}{x} = 1$ ist, wird durch den Graphen bestätigt. Die Gerade y=1 bildet hier die Asymptote.



Die Anwendung der Grenzwertsätze führt nicht nur schneller zum Ziel, sie gibt auch Sicherheit, dass die Vermutung richtig ist.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+2}{x} =$	Der Bruch wird in zwei Teilbrüche zerlegt.
$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{2}{x} \right) =$	Es soll der Grenzwert einer Summe bestimmt werden.
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} =$	Es werden die Grenzwerte der einzelnen Summanden bestimmt.
$\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} =$	Der Bruch im ersten Summanden wird gekürzt.
$1 + 0 = 1$	Die Einzelgrenzwerte werden bestimmt und addiert.

Also: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+2}{x} = 1$

Man beachte: Der Grenzwert einer konstanten Funktion, zum Beispiel y=1, für x→∞ ist der Funktionswert selbst $\lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$.

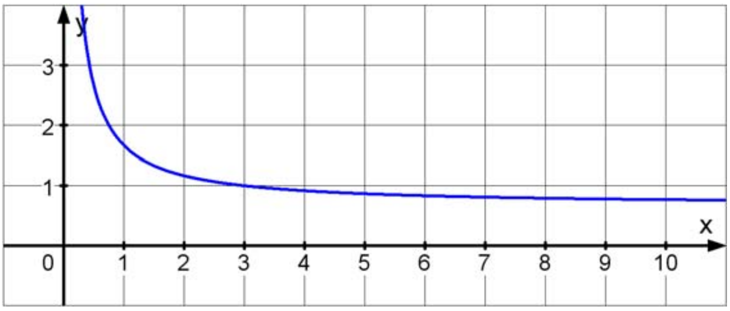
Beispiel 4: $\mathbf{y = \frac{2x+3}{3x}}$ **(x > 0)**

Wie groß ist der Grenzwert dieser Funktion, wenn x über alle Grenzen wächst?

Um eine Vermutung aufzustellen, kann man wieder für x große Werte einsetzen und jeweils y berechnen (Wertetabelle).

x	10	50	100	500	1000	5000
y	0,76667	0,68667	0,67667	0,66867	0,66767	0,666867

Anhand der Wertetabelle lässt sich bei diesem Beispiel nicht leicht eine Vermutung aussprechen. Auch der Graph hilft kaum weiter.



Die Anwendung der Grenzwertsätze führt hier aber zum Ziel.

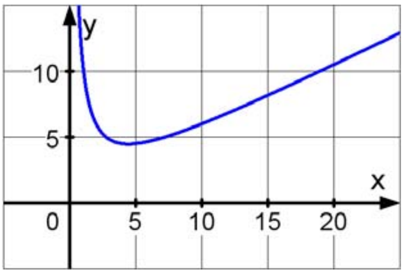
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x} =$	Der Bruch wird in zwei Teilbrüche zerlegt.
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{3x} + \frac{3}{3x}\right) =$	Es soll der Grenzwert einer Summe bestimmt werden.
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{3x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{3x} =$	Es werden die Grenzwerte der einzelnen Summanden bestimmt.
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{3} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$	Die Brüche werden gekürzt.
$\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$	Die Einzelgrenzwerte werden bestimmt und addiert.

Also: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$

Beispiel 5: $\mathbf{y = \frac{x^2 + 20}{2x}}$ **(x > 0)**

Obwohl dieser Funktionsterm so ähnlich aussieht wie die in den vorangegangenen Beispielen, existiert bei dieser Funktion kein Grenzwert, wenn x über alle Grenzen wächst. Das erkennt man, wenn man eine Wertetabelle aufstellt oder sich den Graphen besorgt.

x	10	20	50	100
y	6	10,5	25,2	50,1



Wenn x über alle Grenzen wächst, dann wächst auch y über alle Grenzen.

Es existiert kein Grenzwert für x→∞. [1]

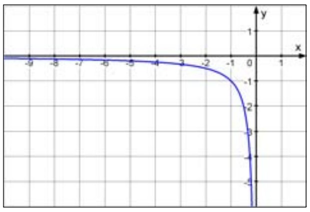
[1] In einigen Mathematikbüchern findet sich die Schreibweise $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+20}{2x} = \infty$.

Diese Schreibweise sollte man vermeiden, da der Eindruck erweckt wird, es existiere ein Grenzwert, nämlich "unendlich", und ∞ sei ein Zeichen für eine Zahl.

Grenzwerte für x → – ∞

Bei den in den Beispielen 1 bis 5 betrachteten Funktionen wurde stets $x > 0$ vorausgesetzt. So wie man das Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow +\infty$ betrachten kann, kann man auch das Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow -\infty$ untersuchen. Die Überlegungen der Beispiele 1 bis 5 lassen sich einfach übertragen. Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen der fünf Funktionen für $x < 0$ und deren Verlauf für $x \rightarrow -\infty$.

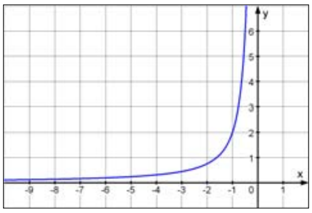
Beispiel 1:



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Für $x \rightarrow -\infty$ nähert sich der Graph ebenfalls der x-Achse, allerdings "von unten". Die Funktionswerte nähern sich dem Grenzwert 0.

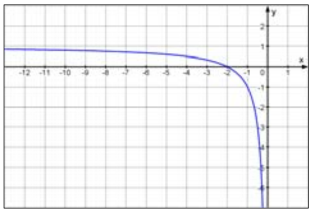
Beispiel 2:



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x^2} = 0$$

Für $x \rightarrow -\infty$ nähert sich der Graph ebenfalls der x-Achse, allerdings "von oben". Die Funktionswerte nähern sich dem Grenzwert 0.

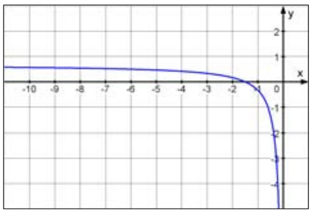
Beispiel 3:



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

Für $x \rightarrow -\infty$ nähert sich der Graph der Geraden y=1. Die Funktionswerte nähern sich dem Grenzwert 1.

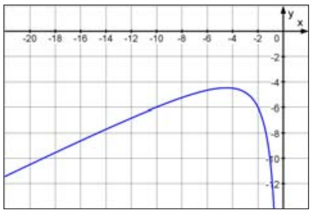
Beispiel 4:



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}$$

Für $x \rightarrow -\infty$ nähert sich der Graph offenbar demselben Grenzwert wie für $x \rightarrow +\infty$, nämlich $\frac{2}{3}$.

Beispiel 5:



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+20}{2x} \text{ existiert nicht.}$$

Für $x \rightarrow -\infty$ wird der Abstand des Graphen von der x-Achse immer größer: $y \rightarrow -\infty$. Es existiert also auch für $x \rightarrow -\infty$ kein Grenzwert.

Aufgaben zu 2.1

1. Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Funktionen für $x \to \infty$ (x>0):

a) $y = \frac{3x-5}{x}$ b) $y = \frac{6x-7x^2}{6x^2}$ c) $y = \frac{-4x^2+2x-1}{x^3}$

2. Bei welchen der folgenden Funktionen existiert kein Grenzwert für $x \to \infty$ (x>0):

a) $y = \frac{x^3-3}{x}$ b) $y = \frac{x^3-3}{x^2}$ c) $y = \frac{x^3-3}{x^3}$

3. Bestimmen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{3}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5-\frac{3}{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^3}$

2.2. Verhalten von Funktionen, wenn sich x einer reellen Zahl x_o nähert – Grenzwerte für $x \to x_o$

Definitionslücken – Pole

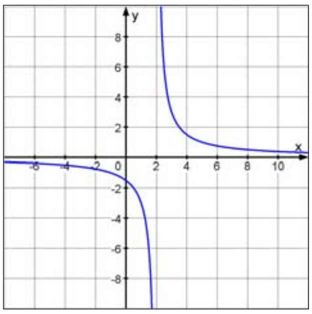
Im Abschnitt 2.1 haben wir bei fünf Funktionen das Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ betrachtet. Diese Funktionen zeigen eine weitere auffällige Eigenschaft, die bei Ihnen bekannten Funktionen (zum Beispiel $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \cos x$) nicht auftrat: Der Graph besteht aus zwei nicht zusammenhängenden Teilen oder, wie man sagt, aus zwei Ästen. Der Grund dafür ist, dass die Funktionen nicht auf der gesamten Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definiert sind. 0 gehört nicht zur Definitionsmenge der Funktionen, denn bei den Funktionstermen aller Funktionen müsste man, wenn man für x 0 einsetzt, durch 0 dividieren. Und eine Division durch 0 ist nicht definiert (siehe Begleitmaterial zum Telekolleg "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie", Abschnitt 1.3, Seite 14).

An einer Stelle x_o, an der der Nenner eines Funktionsterms den Wert 0 annimmt, ist die Funktion nicht definiert.
Man sagt: An dieser Stelle hat die Funktion eine **Definitionslücke**.

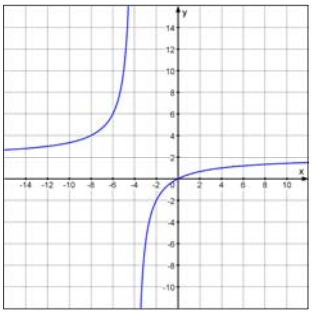
Beispiel 1: $y = \frac{3}{x-2}$ Die Funktion ist in x_0=2 nicht definiert.

Beispiel 2: $y = \frac{2x}{x+4}$ Die Funktion ist in x_0=–4 nicht definiert.

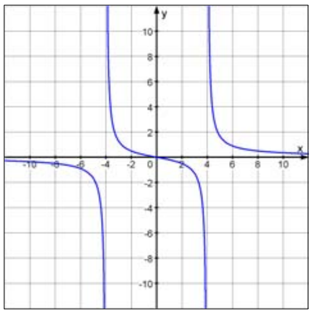
Beispiel 3: $y = \frac{3x}{x^2-16}$ Die Funktion hat sogar zwei Definitionslücken. Der Nenner wird 0, sowohl bei x_o=4 als auch bei x_0=–4.



Beispiel 1



Beispiel 2



Beispiel 3

Bei den betrachteten Beispielen streben die Funktionswerte, wenn sich x einer Definitionslücke nähert, gegen +∞ oder gegen –∞. Dies kann man den Graphen sofort ansehen.
Man kann es aber auch wahrnehmen, wenn man in einer Wertetabelle x-Werte wählt, die sich der Definitionslücke x_o immer mehr nähern.

Beispiel: $y = \frac{3}{x-2}$ Definitionslücke: x_o=+2

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001
y	3	6	30	300	3000	30000

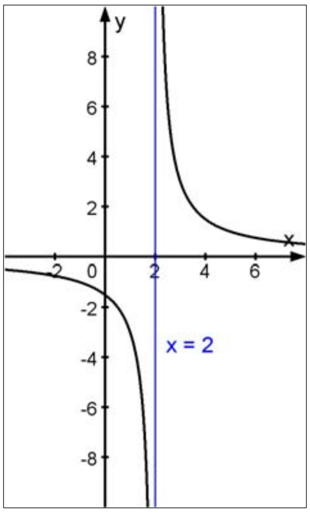
Die x-Werte nähern sich von rechts der Definitionslücke: y → +∞.

Wenn sich die x-Werte von links der Definitionslücke nähern, entsteht folgende Tabelle:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999
y	- 3	- 6	- 30	- 300	- 3000	- 30000

Man sieht: y → –∞.

Wenn man ausdrücken will, dass sich x von rechts der Definitionslücke nähert, schreibt man: $x \to 2^{+}$. Entsprechendes gilt, wenn sich x von links der Definitionslücke nähert: $x \to 2^{-}$



Am Graphen findet man die Ergebnisse, die sich aus den Tabellen ergeben, bestätigt: Wenn x gegen 2 strebt – gleichgültig ob von rechts oder von links –, nähert sich der Graph immer mehr einer Parallelen zur y-Achse, nämlich der Geraden x = 2.
Wie im Abschnitt 2.1 heißt auch hier eine Gerade, der sich der Graph beliebig nähert, **Asymptote**.

Eine Definitionslücke, bei der $y \to +\infty$ oder $y \to -\infty$ strebt, nennt man einen **Pol** des Graphen.

Grenzwerte für $x \to x_o$

Nicht immer strebt y gegen $+\infty$ oder $-\infty$, wenn sich x einer Definitionslücke nähert, wie folgendes Beispiel zeigt: $y = \frac{x^2 - 2x}{x}$.

Man erkennt sofort, dass die Funktion eine Definitionslücke bei x=0 hat. Die Definitionsmenge ist also $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$[2]. Wie in den vorangegangenen Beispielen kann man auch hier mit einer Wertetabelle das Verhalten der Funktion untersuchen, wenn x gegen 0 strebt.

x strebt von rechts gegen 0 ($x \to 0^{+}$)

x	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001
y	–1	–1,5	–1,9	–1,99	–1,999	–1,9999

x strebt von links gegen 0 ($x \to 0^{-}$)

x	–1	– 0,5	– 0,1	– 0,01	– 0,001	– 0,0001
y	–3	–2,5	–2,1	–2,01	–2,001	–2,0001

In beiden Fällen strebt y gegen –2.

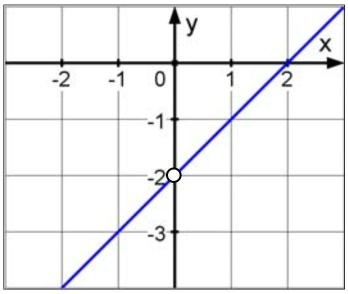
Man schreibt: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x} = -2$ (linksseitiger Grenzwert)

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x} = -2$ (rechtsseitiger Grenzwert)

[2] Gelesen: D gleich R ohne 0.

Für den Graphen bedeutet dies:

- An der Stelle x=0 hat der Graph ein "Loch". Die Funktion ist für x=0 nicht definiert.
- Nähert man sich auf dem Graphen von rechts oder links dem "Loch", so kommt man dem Wert y=–2 beliebig nahe.



Wenn – wie hier – links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, sagt man: Die Funktion $y=\frac{x^2-2x}{x}$ hat den **Grenzwert –**2, wenn x gegen 0 strebt, und schreibt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}=-2$.

In Lektion 5 wird das Thema "Grenzwert von Funktionen" wieder aufgegriffen und vertieft.

Anwenden der Grenzwertsätze

In Abschnitt 2.1 haben wir gesehen, dass man mithilfe der Grenzwertsätze für $x\to+\infty$ oder $x\to-\infty$ einen Grenzwert durch Umformen des Funktionsterms bestimmen kann. Die Grenzwertsätze gelten auch für $x\to x_0$. Voraussetzung ist natürlich in allen Fällen, dass der Grenzwert existiert und y nicht gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt.

Beispiel 4:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}=$	Definitionsmenge: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ Der Bruch wird in zwei Teilbrüche zerlegt.
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x}-\frac{2x}{x}\right)=$	Es soll der Grenzwert einer Differenz bestimmt werden.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=$	Es werden die Grenzwerte von Minuend und Subtrahend bestimmt.
$\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}2=$	Die Brüche werden gekürzt.
$0 \quad - \quad 2 \quad = \quad -2$	Die Einzelgrenzwerte werden bestimmt und subtrahiert.

Also: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}=-2$

Man beachte: Der Grenzwert einer konstanten Funktion y=a für $x\to x_0$ ist der Funktionswert selbst $\lim\limits_{x\to x_0}a=a$.

Beispiel 5:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+x)(x-2)}{x-2}=$	Definitionsmenge: $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ Der Bruch wird durch (x–2) gekürzt.
$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x)=$	Es soll der Grenzwert einer Summe bestimmt werden.
$\lim\limits_{x\to 2}x^2 + \lim\limits_{x\to 2}x=$	Es werden die Grenzwerte der einzelnen Summanden bestimmt.
$4 \quad + \quad 2 \quad = \quad 6$	Die Einzelgrenzwerte werden bestimmt und addiert.

Also: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+x)(x-2)}{x-2}=6$

Beispiel 6:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=$	Definitionsmenge: $\mathbb{R}\backslash\{3\}$
$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=$	Der Zähler wird in ein Produkt zerlegt.
$\lim\limits_{x\to 3}=(x+3)=$	Der Bruch wird durch (x-3) gekürzt.
$\lim\limits_{x\to 3}x + \lim\limits_{x\to 3}3=$	Es werden die Grenzwerte der beiden Summanden bestimmt.
$3 \quad + \quad 3 \quad = \quad 6$	Die Einzelgrenzwerte werden addiert.

Also: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

Hebbare Definitionslücken

Die in diesem Abschnitt 2.2 betrachteten Funktionen enthielten alle eine Definitionslücke. Es war jeweils die Stelle, an der im Funktionsterm durch 0 hätte dividiert werden müssen. Wir bezeichnen einen solchen x-Wert allgemein mit x_o.

Bei Annäherung der x-Werte an x_o muss man zwei Fälle unterscheiden:

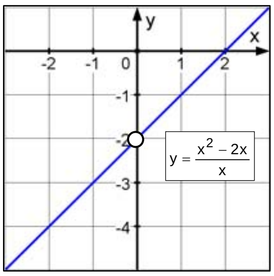
– Die Funktionswerte streben gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$. Es existiert kein Grenzwert. Der Graph hat einen Pol.

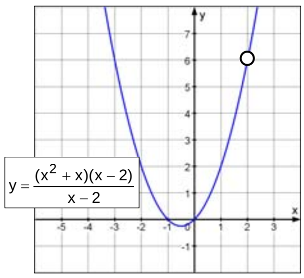
– Die Funktionswerte y streben gegen einen Grenzwert.

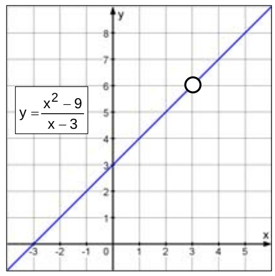
Hier noch einmal ein Überblick über die Funktionen und deren Definitionslücken.

	Funktion	Definitionslücke x_o	Definitionsmenge	Grenzwert der Funktionswerte für $x \to x_0$
1	$y = \frac{3}{x-2}$	2	$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	kein Grenzwert
2	$y = \frac{2x}{x+4}$	-4	$D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$	kein Grenzwert
3	$y = \frac{3x}{x^2-16}$	-4 und 4	$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$	kein Grenzwert
4	$y = \frac{x^2-2x}{x}$	0	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	-2
5	$y = \frac{(x^2+x)(x-2)}{x-2}$	2	$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	6
6	$y = \frac{x^2-9}{x-3}$	3	$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$	6

In den Fällen 4 bis 6 hat der Graph an der Stelle x_0 eine Lücke.







Man kann diese Lücke "stopfen", wenn man den Grenzwert der Funktionswerte für $x \to x_0$ als Funktionswert an der Stelle x_o zusätzlich definiert.
Man sagt: Es handelt sich um eine **hebbare Definitionslücke.**

Hier die Zusatzdefinitionen, die erforderlich sind, damit f(x) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.[3]
Beispiel 4: $f(0) = -2$ Beispiel 5: $f(2) = 6$ Beispiel 6: $f(3) = 6$

[3] Zur Schreibweise f(x), f(2), ... siehe Begleitmaterial zum Telekolleg "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie", Abschnitt 7.1 (Seite 80).

Aufgaben zu 2.2

1. Geben Sie die Definitionslücken x_o der Funktionen mit folgenden Funktionsgleichungen an.

a) $y = \frac{x}{x-5}$ b) $y = \frac{5x-1}{x-4}$ c) $y = \frac{3x^2}{x^2-36}$

2. Bestimmen Sie bei folgenden Funktionen den Grenzwert für $x \to x_o$ (x_o ist Definitionslücke).

a) $y = \frac{x^2+3x}{x}$ $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ b) $y = \frac{(x^2+2x)(x+2)}{x+2}$ $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

c) $y = \frac{x^2-16}{x-4}$ $D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen eine Polstelle oder eine hebbare Definitionslücke haben. Formulieren Sie für die Funktionen mit hebbarer Definitionslücke eine Zusatzdefinition so, dass die Funktion dann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

a) $y = \frac{5x-2x^2}{x}$ $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ b) $y = \frac{5x-2x^2}{x^2}$ $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

c) $y = \frac{7x}{x-3}$ $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

Wiederholungsaufgaben

Führen Sie die nachfolgenden Aufträge bei jeder der Funktionen mit folgenden Funktionsgleichungen durch.

a) $y = \frac{8x^2-10x}{8x^2}$ b) $y = \frac{x^2-10x}{2x}$ c) $y = \frac{x-2}{x(x-2)}$

1. Bestimmen Sie den Grenzwert für $x \to \infty$.

2. Bestimmen Sie die Definitionslücken x_o.

3. Entscheiden Sie, ob die Funktion in x_o einen Pol oder eine hebbare Definitionslücke besitzt.

4. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert für $x \to x_o$.

5. Geben Sie, wenn möglich, eine Zusatzdefinition so an, dass die Funktion dann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

6. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

3. Grundableitungsregel

Vor der Sendung

Nach dem Ausflug in das "Reich der Grenzwerte" in Lektion 2 kehren wir nun zu den Funktionen und den Steigungen des Graphen einer Funktion zurück und greifen die Überlegungen am Ende von Lektion 1 wieder auf. Im Mittelpunkt stehen die Steigungen von Funktionsgraphen. Wenn der Graph eine gekrümmte Linie ist, ändert sich seine Steigung von Punkt zu Punkt. In Lektion 1 wurde die Steigung eines Graphen in einem Punkt definiert als die Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt. Um die Steigung einer Tangente rechnerisch bestimmen zu können, muss man einen Grenzprozess ausführen – genauer: einen Grenzwert bestimmen. Deshalb haben wir uns in Lektion 2 etwas ausführlicher mit Grenzwerten beschäftigt.

Ziel dieser und der folgenden Lektionen ist es, für möglichst viele Funktionen Regeln zu entwickeln, wie man die Steigung eines Graphen in einem Punkt berechnen kann.

Sie benötigen für das Weitere vor allem Kenntnisse über lineare Funktionen und deren Steigungen. Ferner kann es nützlich sein, wenn Sie sich wieder bewusst machen, wie in Lektion 1 die Steigungen der Graphen von $y=x^2$ und $y=x^3$ ermittelt wurden, und die zugehörigen algebraischen Umformungen noch einmal nachvollziehen.

Übersicht

1. Die an Beispielen gewonnenen Ergebnisse von Lektion 1 werden wiederholt und verallgemeinert. Dabei werden die Begriffe **Differenzialquotient, Ableitung** und **Ableitungsfunktion** eingeführt. Der Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen ihrer Ableitungsfunktion wird untersucht. Schließlich werden fünf Schritte herausgearbeitet, die man durchlaufen muss, um bei einer Funktion zu ihrer Ableitungsfunktion zu gelangen.

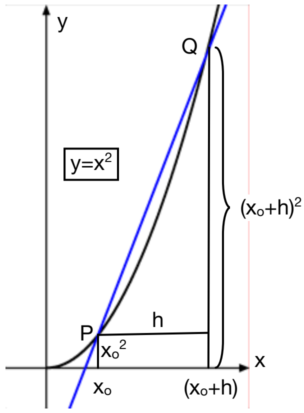
2. Für Potenzfunktionen $y=x^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) gibt es eine einfache Regel, um die jeweils zugehörige Ableitungsfunktion anzugeben. Diese Regel heißt deshalb auch **Potenzregel**. In der Sendung wird sie **Grundableitungsregel** genannt, weil sie die Grundlage für die Bestimmung zahlreicher weiterer Ableitungsfunktionen bildet.

3. Weil die Grundableitungsregel in den nachfolgenden Lektionen eine große Rolle spielt, werden verschiedenartige **Anwendungen** der Regel in Aufgaben vorgestellt.

3.1 Differenzialquotient – Ableitung – Ableitungsfunktion

Steigung der Parabel $y=x^2$ in einem beliebigen Punkt $P(x_0|x_0^2)$

Erinnern Sie sich an die entscheidenden Schritte zur Bestimmung dieser Steigung:



1) Man geht von einer Sekante aus, und wählt deshalb einen zweiten Punkt Q auf der Parabel. Der x-Wert von Q soll um h größer sein als der x-Wert von P. Dann heißen die Koordinaten von Q $(x_0+h \mid (x_0+h)^2)$.

2) Man bestimmt die **Steigung dieser Sekante** durch die Punkte P und Q, indem man die Differenz der y-Werte durch die Differenz der x-Werte dividiert:
$$\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{(x_0+h)-x_0} \qquad (h\neq 0)$$
Umformungen des Terms führen zu dem Term $2x_0+h \quad (h\neq 0)$ (siehe: Lektion 1, Seite 11).

3) Der Punkt Q wandert auf der Parabel auf den Punkt P zu. Algebraisch bedeutet das, dass h gegen 0 strebt. Der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ ist dann die **Steigung der Tangente**.
$$\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

Nun einige Bezeichnungen und Schreibweisen:

> Man bezeichnet die Steigung einer Tangente an den Graphen einer Funktion $y=f(x)$ im Punkt $(x_0|f(x_0))$ als **Differenzialquotient** bzw. **Ableitung** der Funktion an der Stelle x_0.
> Man schreibt: **y'** bzw. **$f'(x_0)$** (gelesen: y Strich bzw. f Strich von x_0).

Beispiel:
$f(x) = x^2$
Der Differenzialquotient bzw. die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 ist: $f'(x_0)=2x_0$.
Der Differenzialquotient bzw. die Ableitung der Funktion an der Stelle $x_0=3$ ist: $f'(3)=6$.
Der Differenzialquotient bzw. die Ableitung der Funktion an der Stelle $x_0=-2$ ist:
$f'(-2)=-4$.

Tangentensteigungsfunktion – Ableitungsfunktion
Mithilfe der Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts kann man nun für die Funktion $y=x^2$ an jeder beliebigen Stelle x_0 die Steigung der Tangente an den Graphen berechnen. Jedem x-Wert wird eindeutig ein Wert y' zugeordnet. Wir haben es mit einer Funktion zu tun.

Die Funktion, die jeder Stelle x die Steigung des Graphen von $y=x^2$ an dieser Stelle zuordnet, nennt man **Tangentensteigungsfunktion** oder **Ableitungsfunktion** von $y=x^2$. Man bezeichnet sie mit y' bzw. mit $f'(x)$. Die Ableitungsfunktion von $y=x^2$ ist also $y'=2x$ bzw. $f'(x)=2x$.

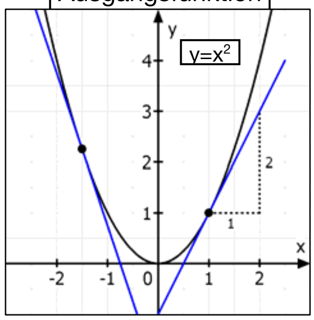
In Lektion 1 (Seite 11) wurde gezeigt: Die Steigung des Graphen der Funktion $y=x^3$ im Punkt $(x_o|x_o^3)$ ist $m=3x_o^2$. Dies kann man jetzt auch so ausdrücken:

Die Ableitungsfunktion von $y=x^3$ ist $y'=3x^2$.

Vergleich des Graphen einer Funktion und des Graphen ihrer Ableitungsfunktion

Wie jede Funktion kann man auch die Ableitungsfunktion in einem Koordinatensystem darstellen.

Ausgangsfunktion



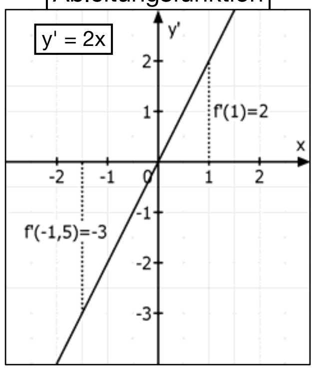
Rechts ist die Ausgangsfunktion $y=x^2$ dargestellt, darunter die zugehörige Ableitungsfunktion $y'=2x$.

In der Ableitungsfunktion gibt der Ordinatenwert (y'-Wert) zu einem bestimmten x-Wert an, welche Steigung die Ausgangsfunktion an dieser Stelle x hat.

Beispiel:
Am Graphen der Ableitungsfunktion liest man ab:
Bei $x=1$ ist der zugehörige y'-Wert 2, oder anders geschrieben: $f'(1)=2$.

Das bedeutet: Bei $x=1$ hat die Ausgangsfunktion die Steigung 2. Anders ausgedrückt: Die Tangente an die Ausgangsfunktion bei $x=1$ hat die Steigung 2.

Ableitungsfunktion



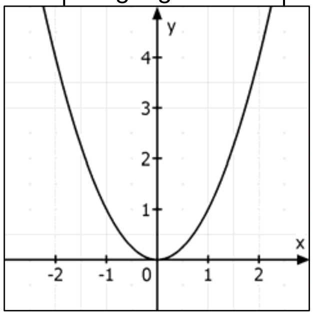
Ein weiteres Beispiel:
Am Graphen der Ableitungsfunktion liest man ab:
Bei $x=-1{,}5$ ist der zugehörige y'-Wert -3, oder anders geschrieben: $f'(-1{,}5)=-3$.

Das bedeutet: Bei $x=-1{,}5$ hat die Ausgangsfunktion die Steigung -3. Anders ausgedrückt: Die Tangente an die Ausgangsfunktion bei $x=-1{,}5$ hat die Steigung -3.

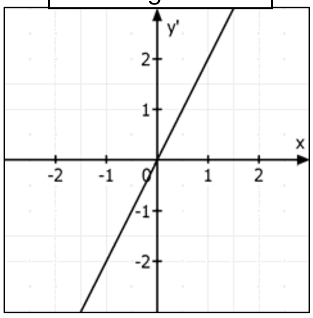
Was kann man außerdem aus der Ableitungsfunktion über den Verlauf des Graphen der Ausgangsfunktion erfahren?

Ableitungsfunktion	Ausgangsfunktion
Die y'-Werte werden für x>0 mit wachsendem x immer größer.	Der Graph der Ausgangsfunktion wird für x>0 immer steiler.
Die y'-Werte sind negativ, wenn x<0 ist.	Wenn x<0 ist, ist die Steigung des Graphen der Ausgangsfunktion negativ. Er verläuft also von links oben nach rechts unten, das heißt, er fällt.
Der y'-Wert für x=0 ist 0; das heißt f'(0)=0.	Der Graph der Ausgangsfunktion hat bei x=0 die Steigung 0. Er hat eine waagerechte Tangente. Es ist die x-Achse.

Ausgangsfunktion



Ableitungsfunktion

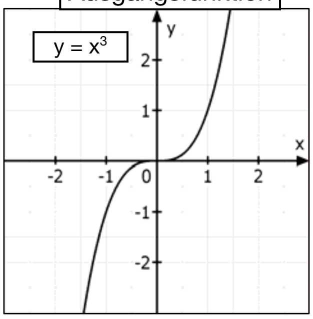


Zur Vertiefung führen wir nun entsprechende Überlegungen mit der Ausgangsfunktion $y=x^3$ und ihrer Ableitungsfunktion $y'=3x^2$ durch.

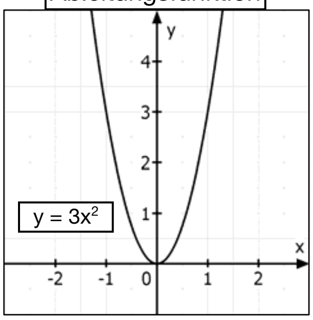
Was kann man hier aus der Ableitungsfunktion über den Verlauf des Graphen der Ausgangsfunktion erfahren?

Ableitungsfunktion	Ausgangsfunktion
Die y'-Werte sind für x>0 positiv.	Die Steigung des Graphen der Ausgangsfunktion ist für x>0 positiv. Von links nach rechts betrachtet, steigt der Graph.
Die y'-Werte sind auch für x<0 positiv,	Auch für x<0 steigt der Graph der Ausgangsfunktion.
Der y'-Wert für x=0 ist 0; das heißt f'(0)=0.	Der Graph der Ausgangsfunktion hat bei x=0 die Steigung 0. Obwohl die x-Achse den Graphen in (0|0) schneidet, spricht man hier von einer Tangente, weil die x-Achse die gleiche Steigung hat wie der Graph im Ursprung, nämlich 0.

Ausgangsfunktion



Ableitungsfunktion



Differenzialquotient bzw. Ableitung von weiteren Funktionen

Die Bestimmung der Steigung des Graphen einer Funktion in einem Punkt spielt in vielen Anwendungsgebieten der Mathematik eine große Rolle, in der Technik, in den Naturwissenschaften, in den Wirtschaftswissenschaften. Dabei treten natürlich nicht nur so einfache Funktion wie $y=x^2$ und $y=x^3$ auf. Wir werden deshalb schrittweise in den folgenden Lektionen für immer komplexere Funktionen ihre Ableitung bzw. ihre Ableitungsfunktion bestimmen.

Das Vorgehen ist immer das Gleiche, das Sie an den Beispielen $y=x^2$ und $y=x^3$ in Lektion 1 kennengelernt haben. Im Folgenden wird dieses Verfahren für eine beliebige Funktion $y=f(x)$ allgemein formuliert. Diese Funktion $y=f(x)$ kann zum Beispiel sein: $y=x^4$ oder $y=3x^5+2x^3$ oder $y=\frac{1}{x}$ oder $y=\sin x$.

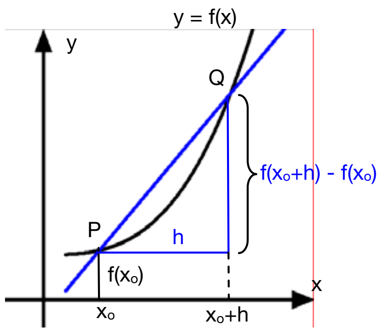
Es wird vorausgesetzt, dass der Graph der Funktion $y=f(x)$ an der betrachteten Stelle x_0 eine eindeutige Tangente besitzt, das heißt, dass dort die Ableitung der Funktion existiert. Beispiele von Funktionen, bei denen das nicht der Fall ist, werden in Lektion 5 untersucht.

Die folgenden 5 Schritte, die zur Ableitung einer Funktion führen, werden wir dann im nächsten Abschnitt auf die Funktion $y = x^4$ anwenden.

Die 5 Schritte, die zur Ableitung einer Funktion y=f(x) führen

Gesucht ist die Ableitung der Funktion $y=f(x)$ an der Stelle x_0.
Anders ausgedrückt: Die Steigung des Graphen von $y=f(x)$ im Punkt $P(x_0|f(x_0))$

Wahl eines zweiten Punkts Q auf dem Graphen	$Q(x_0+h \mid f(x_0+h))$ $(h\neq 0)$
Differenz der y-Werte von Q und P	$f(x_0+h)-f(x_0)$
Differenz der x-Werte von Q und P	$(x_0+h)-x_0$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Grenzwert für h → 0	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$



Anwendung der 5 Schritte auf die Funktion $y=x^4$ – Die Ableitung von $y=x^4$ in $P(x_o|x_o^4)$

Wahl eines zweiten Punkts Q auf dem Graphen von $y=x^4$	$Q(x_0+h \mid (x_0+h)^4)$ $(h\neq 0)$
Differenz der y-Werte von Q und P	$(x_0+h)^4 - x_0^4$
Differenz der x-Werte von Q und P	$(x_0+h) - x_0$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{(x_0+h)^4 - x_0^4}{h}$
Grenzwert für h → 0	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^4 - x_0^4}{h}$

Würde man jetzt im Term $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^4 - x_0^4}{h}$ h gleich 0 setzen, so würde der Bruch gegen $\frac{0}{0}$ streben. $\frac{0}{0}$ ist aber nicht definiert. Man formt deshalb den Quotienten zunächst um. Die algebraische Umformung ist aufwändig. Sie wurde in der Sendung vorgeführt und steht denen, die sich dafür interessieren, im nächsten Abschnitt zum Nachlesen zur Verfügung. Für die Anwendungsaufgaben im Telekolleg ist sie nicht von entscheidender Bedeutung.

Das Ergebnis sollten Sie sich aber merken:

Die Ableitungsfunktion von $y = x^4$ ist $y' = 4x^3$.

Herleitung der Ableitungsfunktion von $y=x^4$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^4 - x_0^4}{h} \qquad (h\neq 0)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x_0+h)^3\cdot(x_0+h)\right] - x_0^3\cdot x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x_0+h)^3\cdot x_0 + (x_0+h)^3\cdot h\right] - x_0^3\cdot x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3\cdot x_0 - x_0^3\cdot x_0 + (x_0+h)^3\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x_0+h)^3\cdot x_0 - x_0^3\cdot x_0}{h} + \frac{(x_0+h)^3\cdot h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h}\cdot x_0 + (x_0+h)^3\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h}\cdot x_0\right) + \lim_{h\to 0}(x_0+h)^3$$

Aus Lektion 1, Abschnitt 1.4, Seite 11 übernehmen wir: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h}\right) = 3x_0^2$

Ferner gilt: $\lim\limits_{h\to 0}(x_0+h)^3 = x_0^3$.

Also ist $\lim\limits_{h \to 0}\left(\frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} \cdot x_0\right) + \lim\limits_{h \to 0}(x_0+h)^3 \;=\; 3x_0^2 \cdot x_0 + x_0^3 \;=\; 4x_0^3$.

Die Ableitungsfunktion von $y = x^4$ ist also $y' = 4x^3$.

Hinweis: Bei einem vollständig korrekten Vorgehen müsste man noch zeigen, dass die Voraussetzungen für das Anwenden der Grenzwertsätze jeweils erfüllt sind.

Die Ableitungsfunktion von $y = x$

Nachdem wir die Ableitungsfunktionen von $y=x^2$, $y=x^3$ und $y=x^4$ erarbeitet haben, betrachten wir nun noch den einfachsten Fall $y=x^1$. Hier müssen wir nicht die "5 Schritte" anwenden.

Für $y=x^1$ kann man auch schreiben: $y=x$. Der Graph dieser Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung, die mit der positiven x-Achse einen Winkel von 45^0 bildet. Sie hat die Steigung $m=1$.

Die Ableitungsfunktion der Funktion $y=x$ ist $y'=1$.

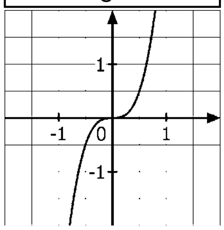
Aufgaben zu 3.1

1. Bestimmen Sie die Ableitung der angegebenen Funktionen an den Stellen x_1, x_2, x_3.

$y=f(x)$	$x_1 = 4$	$x_2 = \frac{3}{2}$	$x_3 = -0{,}5$
$y = x^2$			
$y = x^3$			
$y = x^4$			

2. Sie sollen anhand des Graphen der Ableitungsfunktion (siehe Bild) entscheiden und begründen, für welche x-Werte der Graph der zugehörigen Ausgangsfunktion fällt, steigt oder eine horizontale Tangente besitzt.

Ableitungsfunktion



Die Ausgangsfunktion ...	Weil die Ableitungsfunktion...
– fällt für folgende x-Werte:	
– steigt für folgende x-Werte:	
– hat für folgende x-Werte eine horizontale Tangente:	

3.2 Grundableitungsregel (Potenzregel)

Wir haben jetzt für drei Funktionen die zugehörigen Ableitungsfunktionen erarbeitet.

Ausgangsfunktion	Ableitungsfunktion
$y = x^2$	$y' = 2x$ bzw. $y' = 2x^1$
$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = x^4$	$y' = 4x^3$

Da kann man doch eine Gesetzmäßigkeit entdecken.
Wie könnte die Ableitungsfunktion von $y = x^5$ lauten? – Vermutung: $y' = 5x^4$.

Diese intuitiv erfasste Regel ist in der Tat richtig. Sie lässt sich als Handlungsanweisung formulieren:

> Aus dem Term x^n erhält man die zugehörige Ableitungsfunktion, indem man
> – den Exponenten n als Faktor (Koeffizient) wählt und
> – den Exponenten n um 1 verkleinert: n–1.
> Aus x^n wird so: $n{\cdot}x^{n-1}$.

Diese Regel lässt sich auch auf die Funktion $y=x^1$ anwenden. Man kann die Funktionsgleichung der zugehörigen Ableitungsfunktion auch schreiben als $y'=1{\cdot}x^0$. In der Sendung wurde auf die Definition $x^0=1$ hingewiesen. Daraus ergibt sich: $y'=1{\cdot}1$, also $y'=1$.

Die an den Beispielen für n = 1, 2, 3, 4 intuitiv erfasste Regel gilt für alle natürlichen Zahlen, die größer als 0 sind. Sie lässt sich allgemein so formulieren:

> Die Potenzfunktion $y=x^n$ hat die Ableitungsfunktion $y'=n{\cdot}x^{n-1}$. $(n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$

In der Sendung wurde diese Regel **Grundableitungsregel** genannt. Sie heißt in der Fachliteratur häufig **Potenzregel**.

Beispiele:

Ausgangsfunktion	Ableitungsfunktion
$y = x^7$	$y' = 7x^6$
$y = x^6$	$y' = 6x^5$
$y = x^{12}$	$y' = 12x^{11}$

Für die Potenzfunktionen $y=x^2$, $y=x^3$ und $y=x^4$ haben wir die Grundableitungsregel mit den "5 Schritten" bewiesen. Der entsprechende Beweis für die allgemeine Potenzfunktion ist aufwändig. Wir können im Telekolleg darauf verzichten.
Man kann sich aber vorstellen, dass das Verfahren, das im Abschnitt 3.1 für die Funktion $y=x^4$ durchgeführt wurde (Seite 6), in entsprechender Weise auf die Funktion $y=x^5$, dann auf $y=x^6$, dann auf $y=x^7$ usw. angewendet wird. Beim Beweis für $y=x^4$ wurde davon

Gebrauch gemacht, dass die Grundableitungsregel schon für $y=x^3$ bewiesen ist. Wenn sie dann für $y=x^4$ bewiesen ist, kann man dies benutzen, um die Regel für $y=x^5$ zu beweisen, und so fort. So könnte man schrittweise die Grundableitungsregel für eine beliebige Potenzfunktion $y=x^n$ mit einem bestimmten $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ beweisen.

Eine Vereinfachung der Mengenschreibweise
Erinnern Sie sich: $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N}= \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
Dann ist $\mathbb{N}\setminus\{0\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
Diese Menge bezeichnen wir von jetzt an, wie in der Sendung, mit $\mathbb{N}^*$.
Es ist also $\mathbb{N}^*$ **= {1, 2, 3, 4, ...}**.

Aufgaben zu 3.2

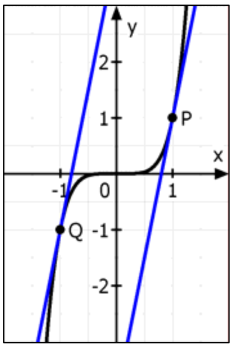
1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:
a) $y = x^{10}$ b) $y = x^{23}$

2. Bestimmen Sie die Potenzfunktion $y=x^n$, deren Ableitungsfunktion $y'=7x^6$ lautet.

3. Welche Steigung hat die Tangente an den Graphen von $y=x^8$ im Punkt $P(1|1)$?

3.3 Beispiele zur Anwendung der Grundableitungsregel

Beispiel 1:
Zeigen Sie: Die Tangenten an den Graphen von $y=x^5$ in den Punkten $P(1|1)$ und $Q(-1|-1)$ verlaufen parallel.
Fertigen Sie eine Skizze an.



Lösung:
Wenn die beiden Tangenten parallel verlaufen, sind die Steigungen der beiden gleich. Also muss die Funktion $y=x^5$ an den Stellen $x=1$ und $x=-1$ dieselbe Ableitung haben.
Die Ableitungsfunktion lautet: $f'(x) = 5x^4$.
Eingesetzt ergibt sich: $f'(1)= 5$ und $f'(-1)=5$.

Beispiel 2:
An welchen Stellen (x-Werten) hat die Funktion $y=x^3$ die Ableitung 6,75?

Lösung:
Die Ableitungsfunktion von $y=x^3$ ist $y'=3x^2$.
Die Ableitung y' an den gesuchten Stellen ist gegeben: 6,75.
Eingesetzt: $6{,}75=3x^2$ Daraus folgt: $x^2=2{,}25$.
Zwei x-Werte erfüllen diese Gleichung: $x_1=1{,}5$ und $x_2=-1{,}5$.

Beispiel 3:
Wie lautet die Gleichung der Tangente, die im Punkt P(1,5|2,25) die Normalparabel berührt?

Lösung:
Die Tangente hat im Berührpunkt dieselbe Steigung wie der Graph von $y=x^2$.
Die Ableitungsfunktion von $y=x^2$ ist $y'=2x$.
Die Steigung des Graphen im Punkt P ist: $f'(1,5) = 2\cdot 1,5 = 3$. Das ist auch die Steigung der Tangente.
Die gesuchte Tangente hat also die Gleichung: $y=3x+b$. b muss noch bestimmt werden.
Die Tangente geht auch durch den Punkt P. Also ist $2,25=3\cdot 1,5+b$.
Daraus ergibt sich: $b=-2,25$.

Die Gleichung der gesuchten Tangente ist also: $y = 3x - 2,25$.

Beispiel 4:
Die Gerade $y=6x-9$ berührt die Normalparabel. Bestimmen Sie den Berührpunkt P.

Lösungswege
Man kann die Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen lösen.

1. Weg
Die Gerade hat die Steigung 6. Gesucht ist also ein Punkt der Normalparabel, in dem der Graph die Steigung 6 hat.
$y'=2x$ → eingesetzt: $6=2x$ → $x=3$.
Im Punkt P(3|9) berührt die Gerade die Normalparabel.

2. Weg
Man setzt die beiden Gleichung $y=6x-9$ und $y=x^2$ gleich; das heißt, man berechnet die Schnittpunkte.
$6x-9 = x^2$
Die Lösung der quadratischen Gleichung ist $x=3$.
Auch auf diesem Weg ergibt sich: Die Gerade berührt die Normalparabel im Punkt P(3|9).

Beispiel 5:
Wie lautet jeweils die Ableitungsfunktion folgender Funktionen?

	a)	b)	c)
Funktion	$y = x^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)	$y = x^{m+3}$ ($m \in \mathbb{N}$)	$y = x^{n-4}$ ($n \in \{5,6,7..\}$)
Ableitungsfunktion			

Lösung:
Man beachte, dass die Grundableitungsregel nur für Exponenten 1, 2, 3, ... gilt. Deshalb muss man die Definitionsmenge für die Variablen k bzw. m bzw. n einschränken.

a) $y'=kx^{k-1}$ Beachten Sie: k–1 ist um 1 kleiner als k.

b) $y'=(m+3)x^{m+2}$ Beachten Sie: m+2 ist um 1 kleiner als m+3.

c) $y'=(n-4)x^{n-5}$ Beachten Sie: n–5 ist um 1 kleiner als n–4.

Aufgaben zu 3.3

1. In welchem Punkt hat der Graph von $y=x^4$ die Steigung –32?

2. Wie lautet die Gleichung der Tangente, die im Punkt P(–1|1) den Graphen von $y=x^6$ berührt?

3. Wie lautet die Ableitungsfunktion von $y=x^{r+1}$; $(r \in \mathbb{N})$

Wiederholungsaufgaben

1. Welche Steigung hat der Graph von $y=x^6$ im Punkt P(–2|64)?

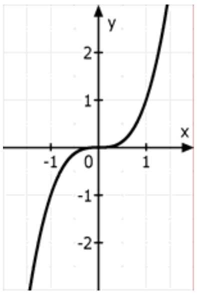
2. In welchem Punkt B berührt die Gerade y=–4x–4 die Normalparabel?

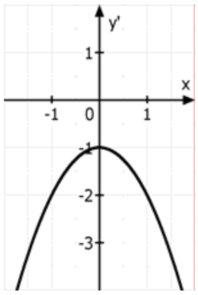
3. Wie lautet die Gleichung der Tangente an $y=x^4$, die parallel zu y=4x verläuft?

4. Wie lautet die Ableitungsfunktion von $y=x^{k-2}$? $(k \in \{3;4;5; ...\})$

5. In P(1,6|2,56) und Q(–1,6|2,56) werden die Tangenten an die Normalparabel gezeichnet. Berechnen Sie, wo sich die Tangenten schneiden?

6. Woran können Sie erkennen, dass im rechten Bild **nicht** die Ableitungsfunktion der Funktion im linken Bild dargestellt sein kann?





4. Ableitungsfunktion in Anwendungen

Vor der Sendung

Die Steigungen von Funktionsgraphen in bestimmten Punkten spielen in den Anwendungen der Mathematik, in den Naturwissenschaften, der Technik, den Wirtschaftswissenschaften und den Sozialwissenschaften eine große Rolle. Die jeweiligen Funktionen, deren Ableitungen gebildet werden müssen, sind in den einzelnen Bereichen und bei verschiedenen Fragestellungen sehr unterschiedlich. Deshalb ist es nötig, für möglichst viele Funktionstypen zu wissen, wie man die Ableitung bei gegebener Funktionsgleichung bildet.
Hier helfen allgemeine Ableitungsregeln, die Sie in dieser Lektion kennenlernen werden. Sie alle stützen sich auf die grundlegenden "5 Schritte, die zur Ableitung einer Funktion führen", (siehe Lektion 3, Seite 5). Diese "5 Schritte" sollten Sie sich jetzt noch einmal vergegenwärtigen.

Da in dieser Sendung auch die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen $y=\sin x$ und $y=\cos x$ erarbeitet werden, ist es ratsam, dass Sie Ihre Kenntnisse über diese Funktionen wieder auffrischen. Das Wesentliche finden Sie im Telekolleg-Begleitmaterial "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie".

Übersicht

1. Mithilfe der **Faktorregel** können Potenzfunktionen mit einem Koeffizienten differenziert werden.

2. Zahlreiche Aufgaben aus Anwendungsgebieten der Mathematik führen auf **ganzrationale Funktionen**.

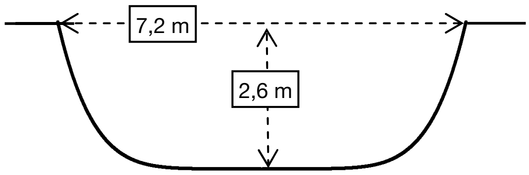
3. Um ganzrationale Funktionen differenzieren zu können, benötigt man außer der Faktorregel auch die **Summenregel**.

4. Mithilfe der "fünf Schritte, die zur Ableitung einer Funktion führen" werden die **Ableitungsfunktionen** von $\mathbf{y = \frac{1}{x}}$ und $\mathbf{y = \sqrt{x}}$ ermittelt.

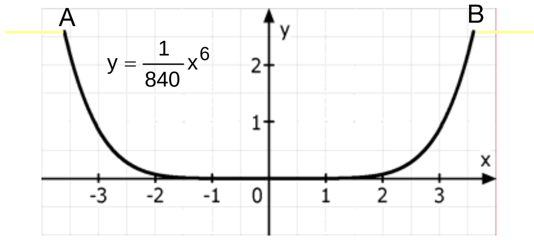
5 Auf graphischem Weg werden die **Ableitungsfunktionen** von $\mathbf{y = \sin x}$ und $\mathbf{y = \cos x}$ gefunden.

4.1 Faktorregel

In der Sendung zu dieser Lektion wurde eine Skaterbahn gezeigt und mathematisch untersucht. Der gekrümmte Teil der Bahn ist in der Mitte ganz flach und steigt nach außen hin steil an.
Die Bahn ist 7,20 m breit und 2,60 m hoch.



In einem Koordinatensystem lässt sich die Bahn durch die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{840}x^6$ beschreiben.
Die äußeren Endpunkte haben die Koordinaten A(–3,6|2,6) und B(3,6|2,6). In diesen Punkten hat die Bahn eine sehr große Steigung.



Wie groß ist die Steigung des Graphen im Punkt B?
Mit den Mitteln der Differenzialrechnung lässt sich die Frage leicht beantworten. Man muss die Ableitungsfunktion f'(x) von $f(x) = \frac{1}{840}x^6$ bilden und dann f'(3,6) berechnen.

Die Funktionsgleichung setzt sich zusammen aus einer Potenzfunktion, nämlich x^6, und einem Faktor, oder, wie man sagt, einem Koeffizienten, nämlich $\frac{1}{840}$. Wie verhält sich so ein Faktor beim Differenzieren? – Da gibt es eine einfache Regel.

Faktorregel:
Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

Anders ausgedrückt:
Die Funktion $y = a \cdot g(x)$ hat die Ableitungsfunktion $y' = a \cdot g'(x)$ $(a \in \mathbb{R})$.

Angewendet auf den Spezialfall $y = a \cdot x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$: $y' = a \cdot (n \cdot x^{n-1})$.

Ergänzende Anmerkungen:

1. Die Funktion g(x) muss an der Stelle x differenzierbar sein. Der Begriff "differenzierbar" wird in Lektion 5 erläutert.
2. Da es im Telekolleg vor allem auf die *Anwendung* der einschlägigen Sätze und Regeln ankommt, wird auf den aufwändigen Beweis der Faktorregel hier verzichtet.

Nun können wir die Frage von oben beantworten: Wie groß ist die Steigung des Graphen im Punkt B?

$$f(x) = \frac{1}{840}x^6$$

$$f'(x) = \frac{1}{840} \cdot 6 \cdot x^5$$

$$f'(3{,}6) = \frac{1}{840} \cdot 6 \cdot 3{,}6^5 \approx 4{,}3$$

Die Steigung der Skaterbahn im Punkt B ist also 4,3. Die nächste Aufgabe zeigt, was man sich darunter vorstellen kann.

Aufgabe: Denken Sie sich eine Tangente, die den Graphen der Skaterbahn im Punkt B berührt. Wie groß ist der Steigungswinkel dieser Tangente, das heißt, der Winkel, den die Tangente mit der positiven x-Achse bildet?

Lösung: Die Steigung der Tangente ist so groß wie die Steigung des Graphen in B, also m=4,3.
Mithilfe der Steigung m einer Geraden kann man den Steigungswinkel α der Geraden berechnen[1]. Es ist: **m = tan α**.

Also ist $4{,}3 = \tan\alpha$ und mithin $\alpha \approx$ **77⁰**.

Aufgaben zu 4.1

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:

a) $y = 5x^5$ b) $y = \frac{1}{5}x^5$ c) $y = \frac{7}{4}x^{12}$

2. Berechnen Sie die Tangentensteigung an der Stelle x_0.

a) $y = -2x^4$; $x_0 = 0{,}5$ b) $y = \frac{3}{4}x^6$; $x_0 = -2$ c) $y = -0{,}4x^5$; $x_0 = -1$

4.2 Ganzrationale Funktionen

In diesem Abschnitt lernen Sie einen neuen Funktionstyp kennen: die ganzrationalen Funktionen.

Einführungsbeispiel
Der Gewinn, den eine Unternehmerin für ein bestimmtes, von ihr produziertes und verkauftes Produkt erzielt, hängt natürlich von der Menge der produzierten Ware ab. Man stellt sich vor: Je mehr jemand produziert, desto größer ist – bei gleichbleibendem Preis – sein Gewinn. Der Gewinn steigt aber in der Regel nicht linear, denn die entstehenden Kosten können mit zunehmender Produktionszahl zum Beispiel unverhältnismäßig stark ansteigen. Es müssen eventuell neue Maschinen angeschafft werden, Mitarbeiter zusätzlich eingestellt und weitere Produktionsanlagen gebaut oder gemietet werden.

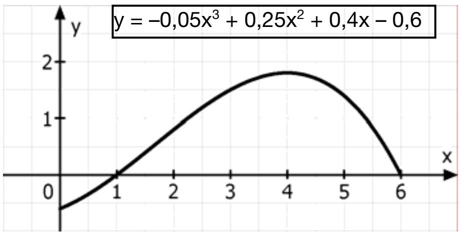
---

[1] Siehe "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie", Seite 148.

Der Gewinn, der bei Herstellung und Verkauf eines Produkts in Abhängigkeit von der produzierten Menge erzielt wird, lässt sich meist durch eine Funktionsgleichung beschreiben.

Im Folgenden steht x für die Anzahl Tonnen, die produziert werden, und y für den Gewinn, der bei dieser Produktionsmenge erzielt wird. y wird in "Tausend Euro" angegeben. Nehmen wir an, der Gewinn y lässt sich mit folgender Funktionsgleichung berechnen: $y = -0{,}05x^3 + 0{,}25x^2 + 0{,}4x - 0{,}6$.

Am Graphen der Funktion liest man einige interessante Informationen ab:



– Wenn nichts produziert wird (x=0), entstehen nur Kosten. Der Gewinn ist negativ; man hat Verlust (y=–0,6).
– Wenn 1 Tonne produziert wird (x=1), heben sich Kosten (Ausgaben) und Umsatz (Einnahmen) auf. Man hat weder Gewinn noch Verlust (y=0).
– Der Gewinn steigt zunächst bei wachsender Produktionsmenge an, fällt dann aber bei weiter wachsender Produktionsmenge wieder ab. Mögliche Gründe dafür sind oben genannt.

Die Funktionsgleichung $y = -0{,}05x^3 + 0{,}25x^2 + 0{,}4x - 0{,}6$ für den Gewinn ist ein typisches Beispiel für eine ganzrationale Funktion.
Schreibt man den Funktionsterm als Summe, so kann man leichter erklären, was man unter einer ganzrationalen Funktion versteht: $y = -0{,}05x^3 + 0{,}25x^2 + 0{,}4x + (-0{,}6)$.

Der Funktionsterm einer **ganzrationalen Funktion** ist eine **Summe von Potenzfunktionen**, von denen jede einen **Koeffizienten** besitzt.

Dies ist eine Formulierung für den Alltagsgebrauch. Die exakte Definition lautet so:

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung

$$\mathbf{y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

heißt **ganzrationale Funktion**.
(Dabei ist: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.)

Der Exponent n heißt **Grad** der ganzrationalen Funktion.

Man nennt den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion auch **Polynom**.
Eine ganzrationale Funktion wird auch **Polynomfunktion** genannt.

Beispiele für ganzrationale Funktionen:	**zugehöriges Polynom:**
a) $y = 2x^4 + 3{,}2x^3 + 4x^2 + 1{,}75x + 3$	$2x^4 + 3{,}2x^3 + 4x^2 + 1{,}75x + 3$
b) $y = -7x^5 + 2x^3 + 9{,}2x^2$	$-7x^5 + 2x^3 + 9{,}2x^2$
c) $y = 8x^7 - 3x^4 - x^2 + x + 15$	$8x^7 - 3x^4 - x^2 + x + 15$

Wie die allgemeine Funktionsgleichung $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+ ... + a_1x+a_0$ einer ganzrationalen Funktion im konkreten Fall zu deuten ist, wird in folgender Tabelle an den obigen Beispielen a) bis c) erläutert.

Beispiel a)

Grad n	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
4	2	3,2	4	1,75	3

Beispiel b)

Grad n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
5	–7	0	2	9,2	0	0

Beispiel c)

Grad n	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
7	8	0	0	–3	0	–1	1	15

Für die ganzrationale Funktion des Beispiels: $y = -0{,}05x^3 + 0{,}25x^2 + 0{,}4x - 0{,}6$ gilt:

Grad n	a_3	a_2	a_1	a_0
3	–0,05	0,25	0,4	–0,6

Aufgaben zu 4.2

Folgende Funktionen sind ganzrational. Lösen Sie die Klammern auf, und schreiben Sie den Funktionsterm als Polynom. Geben Sie dann jeweils die in der Tabelle fehlenden Werte an.

Grad n	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

1. $y = (x - 3)(2x^3 + 5x)$

2. $y = (x^3 - 4)(x^3 + 4)$

3. $y = (4x^2 - 6x)^2$

4. $y = (x^3 + 1)(x^2 - 2)(2x^2 + 3)$

4.3 Ableitung ganzrationaler Funktionen – Summenregel

Um die Ableitung einer ganzrationalen Funktion bilden zu können, benötigt man eine weitere Ableitungsregel, die sogenannte Summenregel.

Summenregel:
Eine Summe (bzw. Differenz) wird gliedweise differenziert.
Anders ausgedrückt:
Die Funktion $y = g(x) + h(x)$ hat die Ableitungsfunktion: $y' = g'(x) + h'(x)$.

Ergänzende Anmerkungen:

1. Die Funktion g(x) und h(x) müssen an der Stelle x differenzierbar sein. Der Begriff "differenzierbar" wird in Lektion 5 erläutert.
2. Da es im Telekolleg vor allem auf die *Anwendung* der einschlägigen Sätze und Regeln ankommt, wird auf den aufwändigen Beweis der Summenregel hier verzichtet.

Anwendung der Summenregel auf ganzrationale Funktionen

Wie lautet die Ableitungsfunktion von $y = 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + 2$?

Jeder der Summanden wird für sich differenziert:

Funktionsterm	Term der Ableitung	
$3x^4$	$3\cdot(4x^3) = 12x^3$	Faktorregel, Grundableitungsregel
x^3	$3x^2$	Grundableitungsregel
$-4x^2$	$-4\cdot(2x) = -8x$	Faktorregel, Grundableitungsregel
$6x$	$6\cdot 1 = 6$	Faktorregel, Regel für y=x (Abschn.3.1)
2	0	siehe nachfolgende Regel

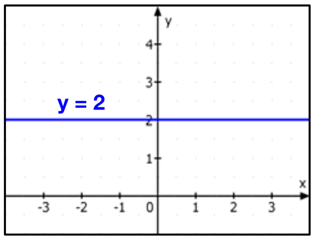
Die Ableitungsfunktion von $y = 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + 2$ lautet demnach:

$$y' = 12x^3 + 3x^2 - 8x + 6$$

Die Ableitungsfunktion von $y = c$ ($c \in \mathbb{R}$)

Der Graph der Funktion $y=c$ ($c \in \mathbb{R}$) ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand c. Im Bild ist der Graph der Funktion y=2 dargestellt.

Die Steigung der Geraden ist 0. Also ist y'=0 die Ableitungsfunktion von y=2.



Die Ableitungsfunktion der Funktion $y = c$ ($c \in \mathbb{R}$) ist $y' = 0$.

Aufgaben zu 4.3

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:

a) $y = 5x^5 - 3x^3 + 0{,}5x^2 + 3x - 4$

b) $y = \frac{2}{3}x^6 - x^3 + 12$

c) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

d) $y = (x^3 + 5x)(2x^2 - 6)$

2. Berechnen Sie die Tangentensteigung an der Stelle x_0.

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2$; $x_0=-1$

b) $y = x^3 - 4x$; $x_0=2$

c) $y = 0{,}5x^5 + 0{,}5$; $x_0=0{,}4$

d) $y = -0{,}05x^3 + 0{,}25x^2 + 0{,}4x - 0{,}6$; $x_0=4$

3. Die Funktion in Aufgabe 2d) ist die Gewinnfunktion von Abschnitt 4.2. Deuten Sie die Lösung der Aufgabe 2d) am Graphen auf Seite 4.

4.4 Ableitung von $y = \frac{1}{x}$ und $y = \sqrt{x}$

In diesem Abschnitt sollen die Ableitungen weiterer einfacher Funktionen ermittelt werden. Weil sich die Funktionen $y = \frac{1}{x}$ und $y = \sqrt{x}$ als Potenzen schreiben lassen, nämlich $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, liegt die Versuchung nahe, auch hier die Potenzregel (Grundableitungsregel) anzuwenden (siehe Lektion 3, Abschnitt 3.2).

Hier ist aber Vorsicht geboten!
Die Grundableitungsregel wurde nämlich nur für den Fall bewiesen, dass der Exponent eine natürliche Zahl ist, und nicht für negative Zahlen, und nicht für Bruchzahlen.

Bevor wir also die Grundableitungsregel auf Funktionen $y=x^k$ mit einem negativen oder einem gebrochenen Exponenten anwenden dürfen, müssen wir prüfen, ob dies erlaubt ist. Dazu wenden wir die "5 Schritte, die zur Ableitung einer Funktion y=f(x) führen" (Lektion 3, Seite 5) auf die Funktionen $y = \frac{1}{x}$ und $y = \sqrt{x}$ an.

	$y = \frac{1}{x}$ in $P\left(x_0 \mid \frac{1}{x_0}\right)$ ($x_0 \neq 0$)	$y = \sqrt{x}$ in $P\left(x_0 \mid \sqrt{x_0}\right)$ ($x_0 > 0$)
Wahl eines zweiten Punkts Q auf dem Graphen	$Q\left(x_0+h \mid \frac{1}{x_0+h}\right)$ ($h \neq 0$)	$Q\left(x_0+h \mid \sqrt{x_0+h}\right)$ ($h \neq 0$)
Differenz der y-Werte von Q und P	$\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}$	$\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}$
Differenz der x-Werte von Q und P	$(x_0+h) - x_0 = h$	$(x_0+h) - x_0 = h$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$	$\frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$
Grenzwert für h → 0	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$

Würde man jetzt h=0 setzen, so ergäbe sich in beiden Fällen der Bruch $\frac{0}{0}$. $\frac{0}{0}$ ist aber nicht definiert. In beiden Fällen formt man deshalb den Quotienten zunächst algebraisch um.
Die Umformungen sind aufwändig. Für die Anwendungsaufgaben im Telekolleg sind die Umformungen selbst nicht von entscheidender Bedeutung, sondern nur das Ergebnis. Deshalb folgen hier, ausgehend vom Ergebnis der Umformungen, zunächst die Grenzwertbildung und die Folgerungen daraus. Im Anschluss an die Folgerungen stehen die algebraischen Umformungen für diejenigen, die sich dafür interessieren, zum Nachlesen zur Verfügung.

Die algebraischen Umformungen führen zu:	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{x_0^{\,2}+x_0h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$
Der Grenzwert für h → 0 ergibt:	$\dfrac{-1}{x_0^{\,2}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Folgerungen:

Die Ableitung der Funktion $y=\dfrac{1}{x}$ ist $y'=-\dfrac{1}{x^2}$. $(x\neq 0)$

Die Ableitung der Funktion $y=\sqrt{x}$ ist $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $(x>0)$

Die folgenden Ausführungen sind für diejenigen unter Ihnen gedacht, die die algebraischen Umformungen vor der Grenzwertbildung im Einzelnen nachvollziehen wollen.

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}$ Zähler und Nenner werden mit $(x_0+h)\cdot x_0$ multipliziert.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{(x_0+h)\cdot x_0}{x_0+h}-\frac{(x_0+h)\cdot x_0}{x_0}}{h\cdot(x_0+h)\cdot x_0}$ Die Brüche im Zähler werden gekürzt.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x_0-(x_0+h)}{h\cdot(x_0+h)\cdot x_0} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h\cdot(x_0+h)\cdot x_0}$ Durch $h\neq 0$ wird gekürzt.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{(x_0+h)\cdot x_0} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{x_0^{\,2}+x_0h}$

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$ Zähler und Nenner werden mit $(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})$ multipliziert.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$ Im Zähler wird die 3. binomische Formel angewendet.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x_0+h}^{\,2}-\sqrt{x_0}^{\,2}}{h\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x_0+h)-x_0}{h\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h\cdot\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}$ Durch $h\neq 0$ wird gekürzt.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$

Erweiterung der Potenzregel (Grundableitungsregel)

Jetzt können wir die Vermutung vom Anfang dieses Abschnitts bestätigen: Man darf auch auf die Funktionen $y=\dfrac{1}{x}$ und $y=\sqrt{x}$ die Potenzregel anwenden.

$y=\frac{1}{x}$ kann man auch schreiben als $y = x^{-1}$.

Wendet man die Potenzregel an, so ergibt sich: $y' = (-1)x^{-2}$, und das ist nichts anderes als: $y' = -\frac{1}{x^2}$.

$y=\sqrt{x}$ kann man auch schreiben als: $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Wendet man die Potenzregel an, so ergibt sich: $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, und das ist nichts anderes als: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Aufgaben zu 4.4

1. Berechnen Sie die Tangentensteigung an der Stelle x_0.

a) $y = \frac{1}{x}$; $x_0=-2$

b) $y = \frac{12}{x}$; $x_0=\frac{1}{2}$

c) $y = -3x^2 + x - \frac{3}{x}$; $x_0=0{,}5$

d) $y = \frac{1}{x} + 1$; $x_0=0{,}4$

e) $y = \sqrt{x}$; $x_0=4$

f) $y = 6\sqrt{x} + 6$; $x_0=9$

g) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$; $x_0=\frac{1}{4}$

h) $y = x^3 - 0{,}5x^2 - x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-1}$; $x_0=1$

2. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Graphen von $y=\frac{1}{x}$ und $y=\sqrt{x}$.
Berechnen Sie die Steigungen der beiden Graphen in diesen Punkten.

3. An welcher Stelle hat der Graph der Funktion $y=\sqrt{x}$ die Steigung $\frac{1}{4}$?

4. An welcher Stelle hat der Graph der Funktion $y=\frac{1}{x}$ die Steigung -4 ?

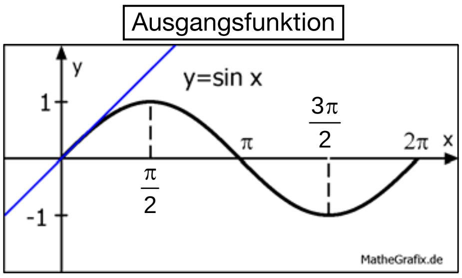
5. Begründen Sie anhand der Ableitung von $y=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, dass der Graph von $y=\frac{1}{x}$ weder für positive noch für negative x-Werte eine positive Steigung hat.

4.5 Die Ableitungsfunktionen von y = sin x und y = cos x

In der Sendung wurden die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen y = sin x und y = cos x anschaulich mithilfe der Graphen gewonnen.

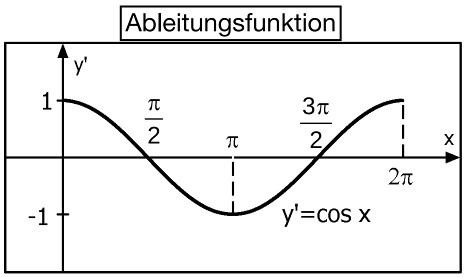
Ableitung von y = sin x

In Lektion 3 wurden die Graphen einer Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion verglichen (siehe Lektion 3, Seite 3). Als Ausgangsfunktion nehmen wir jetzt y = sin x. Den Graphen kennen Sie.[2]
Um den Graphen der Ableitungsfunktion zu erhalten, schauen wir uns die Steigung der Ausgangsfunktion in markanten Punkten an.



Punkt	Steigung von y = sin x	Anschauliche Begründung
(0 | 0)	1	Tangente ist die Gerade y=x; sie hat die Steigung 1.
$\left(\frac{\pi}{2}\middle\vert 1\right)$	0	Der Graph hat eine waagerechte Tangente.
(π | 0)	– 1	Der Graph ist symmetrisch zur Geraden $x = \frac{\pi}{2}$.
$\left(\frac{3\pi}{2}\middle\vert -1\right)$	0	Der Graph hat eine waagerechte Tangente.
(2π | 0)	1	Die Funktion hat die Periode 2π.

Überträgt man die Steigungswerte in ein Koordinatensystem und bestimmt weitere Steigungswerte in anderen Punkten mit dem graphischen Verfahren (siehe: Lektion 1, Seite 4), so erhält man den Graphen der Ableitungsfunktion.



> Die Ableitungsfunktion von y = sin x ist:
> y' = cos x.

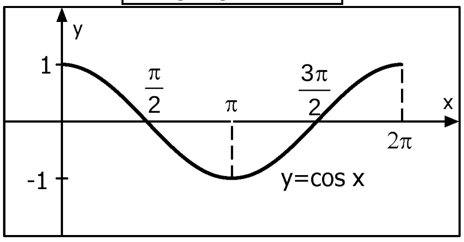
[2] Zur Wiederholung von Sinus und Kosinus: siehe "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie", Abschnitte 12.2–12.4.

Ableitung von y = cos x

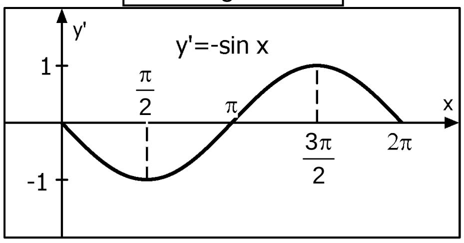
Führt man bei y = cos x entsprechende Überlegungen durch wie oben, so erhält man:

Punkt	Steigung von y = cos x
$(0 \mid 1)$	0
$\left(\frac{\pi}{2} \middle\vert 0\right)$	– 1
$(\pi \mid -1)$	0
$\left(\frac{3\pi}{2} \middle\vert 0\right)$	1
$(2\pi \mid 1)$	0

Ausgangsfunktion



Ableitungsfunktion



Die Ableitungsfunktion von y = cos x ist:
y' = – sin x.

Aufgaben zu 4.5

1. Berechnen Sie die Tangentensteigung
a) der Sinusfunktion b) der Kosinusfunktion
an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

2. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $y = a \cdot \sin x$, wobei a eine reelle Zahl ($a \in \mathbb{R}$) ist.
Begründen Sie, dass die Graphen aller dieser Funktionen bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ eine waagerechte Tangente haben.

3. Zeigen Sie, dass der Graph von $y = \sin x + \cos x$ in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ eine waagerechte Tangente hat.

4. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y = (\sin x)^2$, indem Sie geeignete Funktionswerte mit dem Taschenrechner bestimmen. Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion.

Ausblick auf Lektion 5

In der Sendung zu Lektion 4 wurden eine weitere Funktion und ihre besonderen Eigenschaften angesprochen: $y = |x^2 - 4|$. In der Sendung zu Lektion 5 wird diese Funktion wieder aufgegriffen, da die Eigenschaften der Funktion thematisch zu Lektion 5 gehören.

Im Begleitmaterial werden die Funktion $y = |x^2 - 4|$ und ihre Eigenschaften in Lektion 5 behandelt.

Wiederholungsaufgaben

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von:

a) $y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x - \frac{2}{7}$ b) $y = 2\sin x + 2\cos x$

c) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4x}$ d) $y = (2x^4 + 4x^2)(3x - 3)$

2. Berechnen Sie die Tangentensteigung an der Stelle x_0.

a) $y = -0{,}2x^5 + 0{,}25x^4 + 0{,}5x^2 + 0{,}75$; $x_0=0{,}2$

b) $y = \frac{9}{x}$; $x_0=-0{,}3$

c) $y = \sin x$; $x_0=\frac{5\pi}{4}$

d) $y = 2\sqrt{x}$; $x_0=9$

3. An welcher Stelle hat der Graph der Funktion $y = \sqrt{x}$ die Steigung 8?

4. An welcher Stelle hat der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ die Steigung $-\frac{1}{4}$?

5. Wo hat der Graph von $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$ eine waagerechte Tangente?

6. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y = \sin 2x$, indem Sie geeignete Funktionswerte mit dem Taschenrechner bestimmen. Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion.

5. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Vor der Sendung

Diese Lektion dient einer mathematisch-fachlichen Vertiefung des bisher Behandelten. Aus der Sicht der Anwendungen, die ja im Telekolleg im Vordergrund stehen, sind die Themen dieser Lektion nur von untergeordneter Bedeutung. Bei den von Ihnen zu bearbeitenden Aufgaben geht es ja vor allem um das Lösen bestimmter Fragestellungen mithilfe von Regeln und Verfahren und weniger um das Beweisen mathematischer Sätze.
Für diejenigen von Ihnen aber, die sich in Zukunft vertieft mit Mathematik beschäftigen wollen, sind die Inhalte der Lektion eine wichtige Grundlage zum Verständnis eines präzisen Aufbaus der Differenzial- und Integralrechnung.

Die neuen Begriffe "Differenzierbarkeit" und "Stetigkeit" werden anschaulich an Funktionsgraphen erläutert. Rechnerisch-algebraischer Kalkül ist auf ein Minimum reduziert. Dennoch sollten Sie sich zur Vorbereitung die "5 Schritte, die zur Ableitung einer Funktion führen" in den Lektionen 3 und 4 nochmals in Erinnerung rufen.

Die Überlegungen zum "Grenzwert für $x \to x_0$" in Lektion 2 werden bei der Behandlung der Stetigkeit (Abschnitt 5.3) aufgegriffen und weitergeführt. Eine Wiederholung von Abschnitt 2.2 ist deshalb empfehlenswert.

Übersicht

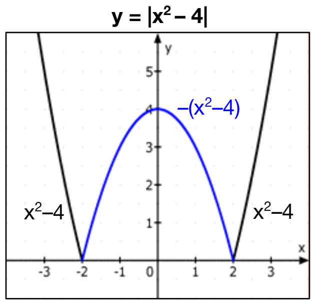
1. **Abschnittweise definierte Funktionen** treten vor allem dort auf, wo *empirische* Sachverhalte mithilfe von Funktionsvorschriften beschrieben werden sollen. In dieser Lektion dienen sie dazu, "außergewöhnliche" Eigenschaften von Funktionen genauer zu untersuchen.

2. Die bisher betrachteten Funktionen, zum Beispiel die ganzrationalen Funktionen, ermöglichten es, für jede Stelle x der Definitionsmenge den Differenzialquotienten, das heißt die Ableitung – und mithin die Steigung des Graphen im entsprechenden Punkt –, zu bestimmen. Dies ist nicht selbstverständlich. Die Untersuchung der **Differenzierbarkeit** geht der Frage nach, ob bei einer Funktion an einer Stelle der Differenzialquotient existiert oder nicht.

3. Die **Stetigkeit** ist eine Eigenschaft von Funktionen, die nicht selbstverständlich ist. Die bisher betrachteten Funktionen besaßen diese Eigenschaft. Funktionen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, fordern zu genaueren Untersuchungen heraus.

5.1 Abschnittweise definierte Funktionen

In den Sendungen zur letzten Lektion und zu dieser Lektion wurde eine Funktion mit einer besonderen Eigenschaft angesprochen. Es handelt sich um die Funktion:
$y = |x^2 - 4|$.



Man kann sich vorstellen, dass sich die Funktion aus 3 Teilen zusammensetzt:

– Für $x \leq -2$ ist die Funktion identisch mit der Funktion $y = x^2 - 4$. In diesem Abschnitt wirken sich die Betragsstriche nicht aus, weil x^2-4 nicht negativ ist. Man kann die Betragsstriche einfach weglassen.

– Das Gleiche gilt für den Abschnitt $x \geq 2$.

– Für x-Werte zwischen –2 und +2, also für $-2 < x < 2$, ist x^2-4 negativ. Wegen der Betragsstriche muss man aber den jeweils entsprechenden positiven Wert als Funktionswert nehmen. Die Funktionsgleichung heißt dann $y = -(x^2-4)$.

Beispiele:

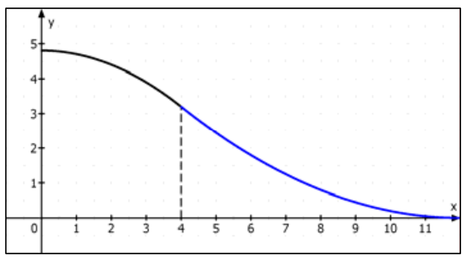
x-Wert	$x^2 - 4$	$-(x^2 - 4)$
$x = -1$	$1 - 4 = -3$	$-(-3) = +3$
$x = 0$	$0 - 4 = -4$	$-(-4) = +4$
$x = 0{,}5$	$0{,}25 - 4 = -3{,}75$	$-(-3{,}75) = +3{,}75$

Man bezeichnet eine Funktion, die sich aus mehreren Teilen zusammensetzt, als **abschnittweise definierte Funktion** und schreibt die Funktionsvorschrift so:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{für } x \leq -2 \\ -(x^2 - 4) & \text{für } -2 < x < +2 \\ x^2 - 4 & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$$

Abschnittweise definierte Funktionen findet man vor allem dort, wo Funktionsvorschriften *empirische* Funktionen beschreiben. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn ein funktionaler Zusammenhang durch einen Graphen vorgegeben ist (1. Beispiel), wenn die Funktion aus einer Messreihe gewonnen wurde (2. Beispiel) oder die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen verbal beschrieben wird (3. Beispiel).

Beispiel 1:
Ein Skihang hat die rechts dargestellte Form. Sie lässt sich durch zwei quadratische Funktionen beschreiben: $f_1(x) = -0{,}1x^2 + 4{,}8$ und $f_2(x) = 0{,}05x^2 - 1{,}2x + 7{,}2$.

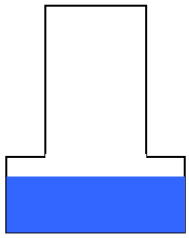


Dem Graphen kann man entnehmen, dass an der Stelle $x=4$ der eine Graph in den anderen übergeht. Dies kann man auch rechnerisch bestätigen: $f_1(4) = -0{,}1 \cdot 4^2 + 4{,}8 = 3{,}2$ und
$f_2(4) = 0{,}05 \cdot 4^2 - 1{,}2 \cdot 4 + 7{,}2 = 3{,}2$.

Die Funktionsvorschrift setzt sich also aus zwei Abschnitten zusammen:

$$y = \begin{cases} -0{,}1x^2 + 4{,}8 & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ 0{,}05x^2 - 1{,}2x + 7{,}2 & \text{für } 4 < x \le 12 \end{cases}$$

Beispiel 2:
In ein Gefäß (siehe Bild) läuft gleichmäßig Wasser ein. Die Höhe des Wasserstands wird in regelmäßigen Zeitabständen gemessen. Das Ergebnis ist in folgender Tabelle dargestellt.

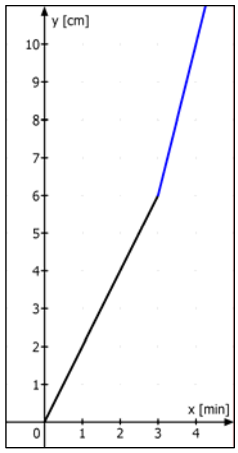


Zeit x [min]	1	2	3	4	5	6
Höhe y [cm]	2	4	6	10	14	18

Der Tabelle kann man entnehmen:
- In den ersten 3 Minuten steigt das Wasser langsamer als in den nächsten 3 Minuten. Das einfließende Wasser hat also nach 3 Minuten die Verengung des Gefäßes erreicht.
- In den ersten 3 Minuten steigt der Wasserspiegel um 2 cm pro Minute, in den nächsten 3 Minuten um 4 cm pro Minute.

Die Zuordnung kann durch eine abschnittweise definierte Funktion beschrieben werden. In beiden Abschnitten handelt es sich um lineare Funktionen, da das Wasser gleichmäßig steigt. Die Funktionsterme erhält man, wenn man jeweils aus zwei Zahlenpaaren Steigung m und y-Achsenabschnitt b der entsprechenden linearen Funktion y=mx+b ermittelt.[1]

$$y = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ 4x - 6 & \text{für } 3 < x \le 6 \end{cases}$$



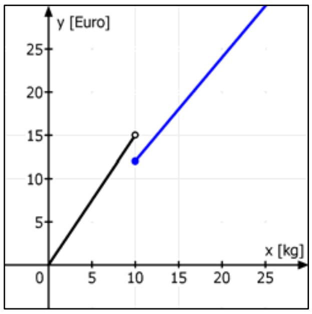
Im Bild rechts ist der Graph der abschnittweise definierte Funktion dargestellt.
Der Graph hat an der Stelle (3|6) einen "Knick". Auf Funktionen, deren Graphen ein solches Verhalten aufweisen, wird in Abschnitt 5.3 näher eingegangen.

[1] Siehe: "Grundkurs Mathematik – Vom Rechnen zu Algebra und Trigonometrie", Seite 85.

Beispiel 3:
Bei einem Händler kostet Streumaterial gegen Eis und Schnee 1,50 € pro kg. Bei Abnahme von 10 kg und mehr verlangt der Händler 1,20 € pro kg.

Die Funktionsvorschrift lässt sich aus den Angaben leicht erstellen.

$$y = \begin{cases} 1{,}5x & \text{für } 0 \le x < 10 \\ 1{,}2x & \text{für } x \ge 10 \end{cases}$$



Der Graph der abschnittweise definierten Funktion ist hier abgebildet. Dabei bedeutet:
○ : Der Punkt gehört nicht zum Graphen.
● : Der Punkt gehört zum Graphen.
Der Graph macht an der Stelle x=10 einen "Sprung". Auf Funktionen, deren Graphen ein solches Verhalten aufweisen, wird in Abschnitt 5.3 näher eingegangen.

Aufgaben zu 5.1

1. Zeichnen Sie den Graphen der abschnittweise definierten Funktion:

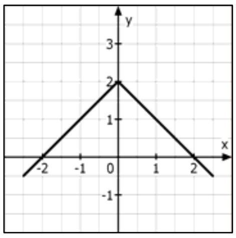
a) $$y = \begin{cases} x-1 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ -2x+6 & \text{für } 2 < x < 3 \\ 0{,}5x-1{,}5 & \text{für } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

b) $$y = \begin{cases} 0{,}5x+0{,}5 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{für } 1 < x \le 2 \\ -0{,}5x+4 & \text{für } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

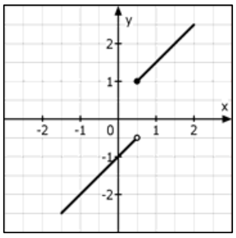
c) $$y = \begin{cases} 0{,}5 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{für } 1 < x \le 2 \\ 3{,}5 & \text{für } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

2. Geben Sie für folgende abschnittweise definierte Funktionen die Funktionsvorschrift an.

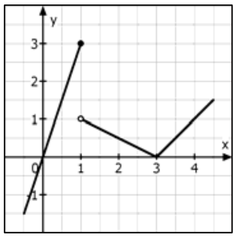
a)



b)



c)



3. Schreiben Sie folgende Betragsfunktionen als abschnittweise definierte Funktionen:

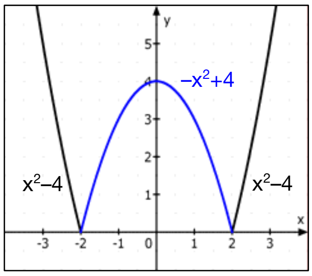
a) $y = |x|$ b) $y = |x-1|$ c) $y = |2x+2|$ d) $y = |2x|+2$

e) $y = |1-x^2|$ f) $y = |x^3-x|$

5.2 Differenzierbarkeit

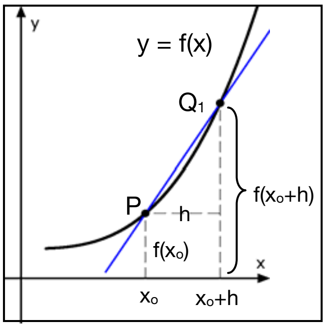
Zurück zum Einführungsbeispiel.

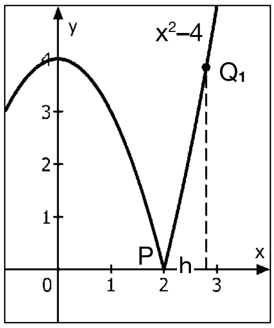
Bereits in der Sendung zu Lektion 4 wurden zwei Punkte des Graphen als auffällig erkannt und genauer untersucht: (2|0) und (-2|0). In diesen Punkten hat der Graph eine "Spitze". Fragt man nach einer Tangente an den Graphen in diesen Punkten bzw. nach der Steigung des Graphen, so kann man keine eindeutige Antwort finden.



In der Sendung zu Lektion 4 wurde für den Punkt P(2|0) gezeigt, dass man zu unterschiedlichen Steigungswerten kommt, je nach dem, ob man sich diesem Punkt von rechts oder von links nähert. Dies wird jetzt aufgegriffen, indem die bekannten "5 Schritte, die zur Ableitung einer Funktion führen" (siehe Lektion 3, Seite 5) angewendet werden, und zwar zunächst mit einem Punkt Q_1, der rechts von P(2|0) liegt und dann mit einem Punkt Q_2, der links von P(2|0) liegt.

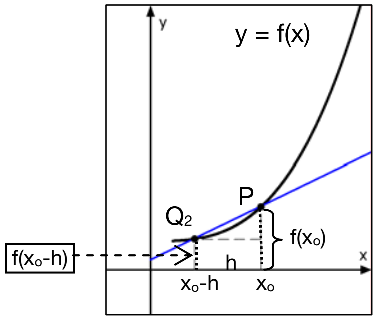
Annäherung an P von rechts

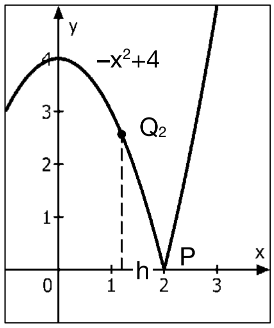




	allgemein: $y = f(x)$ Annäherung an $P(x_0 \mid f(x_0))$	Beispiel: $y = x^2-4$ Annäherung an P(2|0)
Wahl eines Punkts Q_1	$Q_1(x_0+h \mid f(x_0+h))$ (h>0)	$Q_1\ (2+h \mid (2+h)^2-4)$ (h>0) d.h. $Q_1\ (2+h \mid 4h+h^2)$
Differenz der y-Werte von Q_1 und P	$f(x_0+h) - f(x_0)$	$(4h + h^2) - 0$
Differenz der x-Werte von Q_1 und P	$(x_0+h) - x_0 = h$	$(2 + h) - 2 = h$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\frac{4h+h^2}{h} = 4+h$
Grenzwert für h→0	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}(4+h) = 4$

Annäherung an P von links





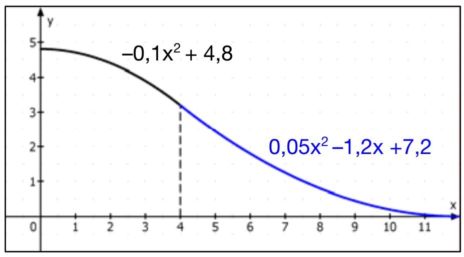
	allgemein: y = f(x) Annäherung an P(x$_0$| f(x$_0$))	**Beispiel:** $y = -x^2+4$ Annäherung an P(2|0))
Wahl eines Punkts Q_2	$Q_2(x_0-h \mid f(x_0-h))$ (h>0)	$Q_2\ (2-h \mid -(2-h)^2+4)$ (h>0) d.h. $Q_2\ (2-h \mid 4h-h^2)$
Differenz der y-Werte von Q_2 und P	$f(x_0-h) - f(x_0)$	$(4h - h^2) - 0$
Differenz der x-Werte von Q_2 und P	$(x_0-h) - x_0 = -h$	$(2 - h) - 2 = -h$
Quotient: $\frac{\text{y}-\text{Differenz}}{\text{x}-\text{Differenz}}$	$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$	$\frac{4h-h^2}{-h} = -4+h$
Grenzwert für h→0	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$	$\lim\limits_{h\to 0}(-4+h) = -4$

Im Beispiel ist der rechtsseitige Grenzwert +4 und der linksseitige –4. Die Grenzwerte stimmen nicht überein.
Man sagt:
Die Funktion $y = |x^2-4|$ ist an der Stelle x=2 **nicht differenzierbar**.
Gleichbedeutend ist: Der Graph hat in diesem Punkt keine eindeutige Tangente.

Beispiel für eine abschnittweise definierte Funktion, die an der "Nahtstelle" differenzierbar ist

In Abschnitt 5.1 wurde der Verlauf eines Skihangs durch folgende Funktion beschrieben:

$$y = \begin{cases} -0{,}1x^2 + 4{,}8 & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ 0{,}05x^2 - 1{,}2x + 7{,}2 & \text{für } 4 < x \le 12 \end{cases}$$



Der Verlauf des Graphen lässt vermuten, dass im Punkt (4|3,2) eine eindeutige Tangente existiert, die Funktion dort also differenzierbar ist.

Die rechnerische Überprüfung mit den "5 Schritten" bestätigt dies.

Annäherung an P von rechts

	allgemein: y = f(x) Annäherung an $P(x_0 \mid f(x_0))$	**rechter Abschnitt:** $y = 0{,}05x^2 - 1{,}2x + 7{,}2$ Annäherung an P(4 | 3,2)
Wahl eines Punkts Q_1	$Q_1(x_0+h \mid f(x_0+h))$ (h>0)	$Q_1\ (4+h \mid 0{,}05(4+h)^2-1{,}2(4+h)+7{,}2)$ d.h. $Q_1\ (4+h \mid 0{,}05h^2 - 0{,}8h + 3{,}2)$ (h>0)
Differenz der y-Werte von Q_1 und P	$f(x_0+h) - f(x_0)$	$(0{,}05h^2 - 0{,}8h + 3{,}2) - 3{,}2$
Differenz der x-Werte von Q_1 und P	$(x_0+h) - x_0 = h$	$(4 + h) - 4 = h$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\frac{0{,}05h^2 - 0{,}8h}{h} = 0{,}05h - 0{,}8$
Grenzwert für h→0	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}(0{,}05h - 0{,}8) = -0{,}8$

Annäherung an P von links

	allgemein: y = f(x) Annäherung an $P(x_0 \mid f(x_0))$	**linker Abschnitt:** $y = -0{,}1x^2 + 4{,}8$ Annäherung an P(4 | 3,2)
Wahl eines Punkts Q_2	$Q_2(x_0-h \mid f(x_0-h))$ (h>0)	$Q_2\ (4-h \mid -0{,}1(4-h)^2 + 4{,}8)$ d.h. $Q_2\ (4-h \mid -0{,}1h^2 + 0{,}8h + 3{,}2)$ (h>0)
Differenz der y-Werte von Q_2 und P	$f(x_0-h) - f(x_0)$	$(-0{,}1h^2 + 0{,}8h + 3{,}2) - 3{,}2$
Differenz der x-Werte von Q_2 und P	$(x_0-h) - x_0 = -h$	$(4 - h) - 4 = -h$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$	$\frac{-0{,}1h^2 + 0{,}8h}{-h} = 0{,}1h - 0{,}8$
Grenzwert für h→0	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$	$\lim\limits_{h\to 0}(0{,}1h - 0{,}8) = -0{,}8$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen überein: –0,8. Die Funktion ist in x=4 differenzierbar.
Gleichbedeutend ist: Der Graph besitzt in dem Punkt (4|3,2) eine eindeutige Tangente.

Differenzierbare Funktionen

In den Lektionen 1 bis 4 haben wir auf eine ganze Reihe von Funktionen die "5 Schritte" angewendet, um die Ableitung der jeweiligen Funktionen an den untersuchten Stellen zu ermitteln. Genau genommen hätten wir jedes Mal den Grenzwert von links und den Grenzwert von rechts bilden müssen, um sicherzustellen, dass eine Ableitung existiert, die Funktion also an der untersuchten Stelle differenzierbar ist.

Allgemein gilt:

Eine Funktion y=f(x) ist an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn die folgenden Grenzwerte existieren und gleich sind:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{(x_0-h)-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \qquad (h>0)$$

Die Ergebnisse, zu denen wir bei entsprechenden Untersuchungen der bisher behandelten Funktionen gelangt wären, sind im Folgenden zusammengestellt.

- Die ganzrationalen Funktionen, die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.
- Die Funktionen $y=\frac{1}{x}$ und $y=\sqrt{x}$ sind auf ihrer jeweiligen Definitionsmenge differenzierbar.

Aufgaben zu 5.2

Prüfen Sie, ob folgende abschnittweise definierte Funktionen y=f(x) an der Stelle x=2 differenzierbar sind, indem Sie die "5 Schritte" bei einer Annäherung von links und bei einer Annäherung von rechts an x=2 durchführen und die Ergebnisse vergleichen.

1. $y=\begin{cases} x^3 & \text{für } 0\le x\le 2 \\ 2x^2 & \text{für } 2<x\le 3 \end{cases}$

2. $y=\begin{cases} 1{,}5x^2-2 & \text{für } 0\le x\le 2 \\ 0{,}5x^3 & \text{für } 2<x\le 3 \end{cases}$

5.3 Stetigkeit

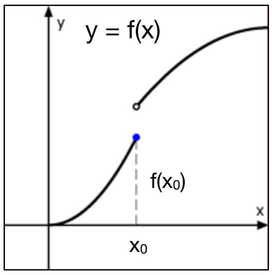
Unstetige Funktionen

Bei zahlreichen empirischen Funktionen – und nicht nur dort – findet man ein Verhalten, das von dem der bisher betrachteten Funktionstypen abweicht (siehe auch Abschnitt 5.1).

Zwei charakteristische Beispiele:

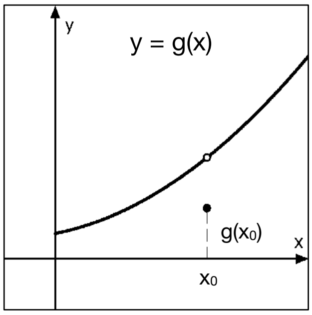
Beispiel 1:

Der Graph der Funktion y=f(x) macht in x_0 einen "Sprung". Der Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 gehört zu der linken Teilfunktion. Die rechte Teilfunktion ist in x_0 nicht definiert.



Beispiel 2:

Der Graph dieser Funktion y=g(x) hat in x_0 eine Lücke. Trotzdem ist die Funktion in x_0 definiert. Der Funktionswert $g(x_0)$ gehört aber weder zur linken Teilfunktion noch zur rechten. Der entsprechende Punkt ist mit ● gekennzeichnet.

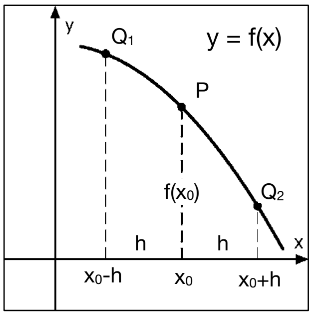


Man sagt:
Die Funktionen y=f(x) und y=g(x) sind in x_0 **unstetig**.

Was versteht man unter "Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0"?

Folgende Plausibilitätsbetrachtung kann dies verdeutlichen.

Man stelle sich vor, die Punkte Q_1 und Q_2 wandern auf dem Graphen der Funktion y=f(x) auf den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ zu. Wenn sie sich im Grenzfall im Punkt P treffen, so ist die Funktion in x_0 stetig.



Diesen Sachverhalt drückt man mathematisch so aus:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} f(x_0 - h) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \qquad (h>0)}$$

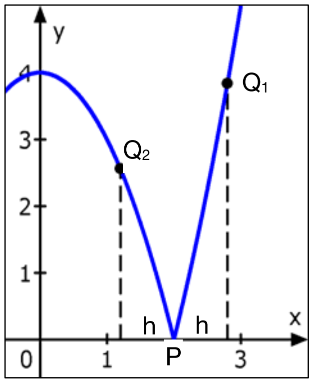
Im Beispiel 1 stimmt zwar der linksseitige Grenzwert $\lim_{h\to 0} f(x_0 - h)$ mit dem Funktionswert $f(x_0)$ überein, aber nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$.
Die Funktion y=f(x) ist deshalb an der Stelle x_0 unstetig.

Im obigen Beispiel 2 stimmen der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert überein: $\lim_{h\to 0} g(x_0 - h) = \lim_{h\to 0} g(x_0 + h)$. Sie unterscheiden sich aber vom Funktionswert $g(x_0)$. Die Funktion y=g(x) ist deshalb an der Stelle x_0 unstetig.

Ist eine Funktion an der Stelle x_0 nicht definiert, so ist sie dort auch nicht stetig.

Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Die Funktion $y=|x^2-4|$ (siehe Abschnitt 5.1) ist ein Beispiel für eine Funktion, die an einer Stelle stetig und doch nicht differenzierbar ist.



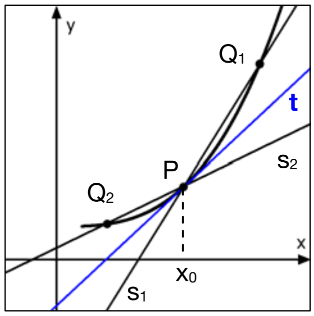
Stellen wir uns vor, die Punkte Q_1 und Q_2 wandern auf dem Graphen auf den Punkt P(2|0) zu. Im Grenzfall trifft Q_1 genauso wie Q_2 auf P. Das heißt:

$$\lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0} f(2+h) = f(2) \qquad (h>0)$$

Somit ist die Funktion $y=|x^2-4|$ an der Stelle x=2 stetig. Aus Abschnitt 5.2 wissen wir aber, dass sie dort nicht differenzierbar ist.

Umgekehrt gilt aber:

> Ist eine Funktion y=f(x) an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

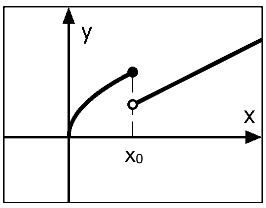


Anschaulich kann man sich das so erklären:
Es wird vorausgesetzt, dass die Funktion in x_0 differenzierbar ist. Dann hat sie dort eine eindeutige Tangente t. Diese Tangente ist die Grenzlage der Sekanten s_1 und s_2, wenn Q_1 bzw. Q_2 auf dem Graphen auf P zuwandern. Da vorausgesetzt wird, dass eine eindeutige Tangente existiert, müssen die drei Punkte Q_1, Q_2 und P im Grenzfall zusammenfallen. Dies ist aber genau die Bedingung dafür, dass die Funktion in x_0 stetig ist.

Anschauliches Erfassen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit

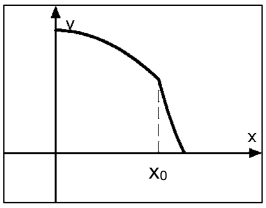
Anhand der folgenden Graphen soll anschaulich entschieden werden, ob die entsprechenden Funktionen an der Stelle x_0 stetig oder nicht stetig bzw. differenzierbar oder nicht differenzierbar sind. Stellen Sie sich jeweils einen Punkt Q_1 links und einen Punkt Q_2 rechts der kritischen Stelle $P(x_0|f(x_0))$ vor. Lassen Sie in Gedanken die Punkte auf dem Graphen auf P zuwandern, und überlegen Sie, ob die Bedingungen für Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit erfüllt sind.

(1)



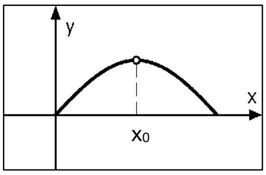
	Begründung
nicht stetig	Links- und rechtsseitiger Grenzwert von y=f(x) für $x\to x_0$ stimmen nicht überein.
nicht differenzierbar	Funktion ist in x_0 nicht stetig.

(2)



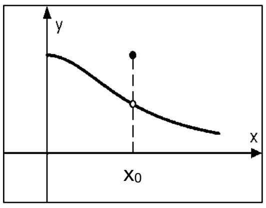
	Begründung
stetig	Links- und rechtsseitiger Grenzwert von y=f(x) für $x \rightarrow x_0$ stimmen mit dem Funktionswert überein.
nicht differenzierbar	Die Grenzwerte der Sekantensteigungen in x_0 von links und von rechts stimmen nicht überein.

(3)



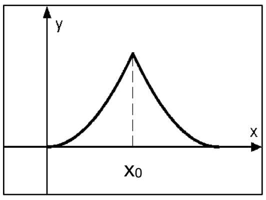
	Begründung
nicht stetig	Die Funktion ist in x_0 nicht definiert.
nicht differenzierbar	Funktion ist in x_0 nicht stetig.

(4)



	Begründung
nicht stetig	Links- und rechtsseitiger Grenzwert für $x \rightarrow x_0$ stimmen nicht mit dem Funktionswert überein.
nicht differenzierbar	Funktion ist in x_0 nicht stetig.

(5)



	Begründung
stetig	Links- und rechtsseitiger Grenzwert von y=f(x) für $x \rightarrow x_0$ stimmen mit dem Funktionswert überein.
nicht differenzier bar	Die Grenzwerte der Sekantensteigungen in x_0 von links und von rechts stimmen nicht überein.

Anschauliche Betrachtungsweisen an Graphen geben natürlich keine Sicherheit, ob getroffene Entscheidungen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit wirklich richtig sind. Sowohl beim Differenzialquotienten als auch bei der Stetigkeit müssen bei exaktem Vorgehen die jeweiligen Grenzwerte – sofern sie existieren – rechnerisch ermittelt werden. Schließlich muss geprüft werden, ob die oben genannten Bedingungen für Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit erfüllt sind.
Entsprechende Ausführungen übersteigen den Rahmen des Telekollegs. Interessierte finden diese zum Beispiel in den einschlägigen Lehrbüchern für die gymnasiale Oberstufe. In dieser Lektion geht es vor allem darum, ein anschauliches Verständnis für Stetigkeit und Differenzierbarkeit aufzubauen.

Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$ – Übersicht über Schreib- und Sprechweisen

Bereits in Lektion 2 wurden Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$ untersucht (siehe Abschnitt 2.2). Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die gebräuchlichen Begriffe und Schreibweisen im Zusammenhang mit Grenzwerten von Funktionen y=f(x), wenn sich x einer Stelle x_0 nähert.

linksseitiger Grenzwert	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$	$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h)$ (h>0)
rechtsseitiger Grenzwert	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$	$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$ (h>0)

Wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, spricht man vom **"Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$"** (ohne weiteren Zusatz).

Grenzwert	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ x nimmt Werte größer x_0 und kleiner x_0 an.	$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$ ($h \neq 0$) h nimmt Werte größer 0 und kleiner 0 an.

Aufgaben zu 5.3

1. An welcher Stelle x_0 sind folgende Funktionen unstetig? Geben Sie einen Grund für die Unstetigkeit an.

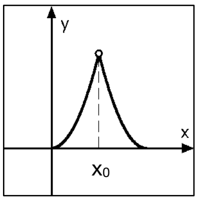
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{für } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

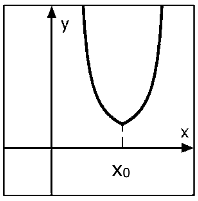
b) $y = \dfrac{1}{x}$

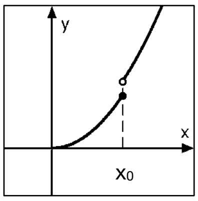
c) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

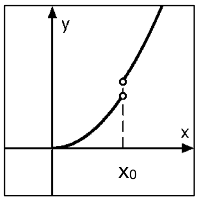
d) $y = \dfrac{x(x-2)}{x-2}$

2. Welche der folgenden Funktionen sind jeweils an der Stelle x_0 unstetig, welche sind stetig, aber nicht differenzierbar?

a) 

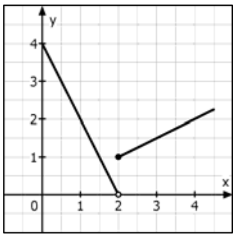
b) 

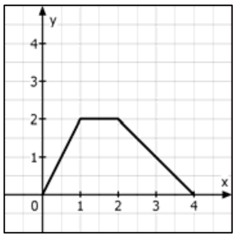
c) 

d) 

Wiederholungsaufgaben

1. Geben Sie für folgende abschnittweise definierte Funktionen die Funktionsvorschrift an.

a) 

b) 

2. Schreiben Sie folgende Betragsfunktionen als abschnittweise definierte Funktionen.

a) $y = |x - 2|$ b) $y = |x| - 2$ c) $y = |x^2 - 1|$

3. An welcher Stelle x_0 sind folgende Funktionen unstetig? Geben Sie einen Grund für die Unstetigkeit an.

a)
$$y = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } 0 \le x < 2 \\ x+1 & \text{für } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

b)
$$y = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ (x-1)^2 & \text{für } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

c)
$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Lösungen der Aufgaben

Liebe Kollegiatin, lieber Kollegiat,
die Lösungen wurden mit größtmöglicher Sorgfalt erstellt, die Aufgaben mehrfach durchgerechnet. Trotzdem können sich Fehler eingeschlichen haben. Wenn Sie bei einer Aufgabe trotz mehrfachen Rechnens nicht zu dem Ergebnis kommen, das in den Lösungen steht, sollten Sie jemanden zu Rate ziehen (z.B. Kolleglehrer/in, Mitkollegiat/in) und uns ggf. einen gefundenen Fehler mitteilen. Vielen Dank.

Lektion 1

Aufgaben zu 1.1

1. a) 2 ; b) –2 ; c) –2,5

2. a) $y=2x-1$ b) $y=-x+3$ c) $y=-3x$

3. a) $80\,\frac{km}{h}$; b) $90\,\frac{km}{h}$

4. a) Steigung in P(3|0): 2 ; b) Steigung in P(2|2): –1

Aufgaben zu 1.2

1.

Q_1 (2 | 4)
$m_1 = 3$

2.

Q_2 (1,5|2,25)	Q_3 (1,1|1,21)	Q_4 (1,01|1,0201)
$m_2 = 2,5$	$m_3 = 2,1$	$m_4 = 2,01$

3. m = 2

Aufgaben zu 1.3

1. m = 2 **2.** m = 3

Aufgaben zu 1.4

1. m = –5 **2.** m = 12 **3.** (3|9) **4.** (2|8) und (–2|–8) **5.** (–1|1)

Wiederholungsaufgaben

1. $60\,\frac{km}{h}$ **2.** m = 2,4 **3.** m = 27 **4.** (–2,4 | 5,76)

5. (1,5 | 3,375) und (–1,5 | –3,375) **6.** $y = 6x-9$ **7.** für $x = 0$ und für $x = \frac{2}{3}$

Lektion 2

Aufgaben zu 2.1

1. a) 3 b) $-\frac{7}{6}$ c) 0

2. a) kein Grenzwert b) kein Grenzwert c) Grenzwert: 1

3. a) 5 b) 5 c) 0

Aufgaben zu 2.2

1. a) $x_0 = 5$ b) $x_0 = 4$ c) $x_0 = 6$ und $x_0 = -6$

2. a) 3 b) 0 c) 8

3. a) hebbar; f(0) = 5 b) Pol c) Pol

Wiederholungsaufgaben

1. a) 1 b) $y \to \infty$ c) 0

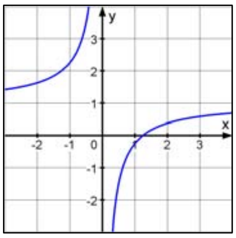
2. a) 0 b) 0 c) 0 und 2

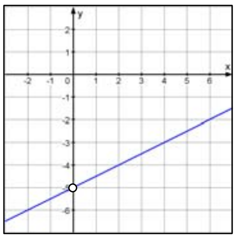
3. a) Pol b) hebbar c) in 0: Pol ; in 2: hebbar

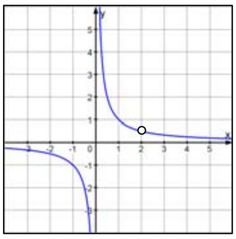
4. a) kein Grenzwert b) –5 c) in 0: kein Grenzwert ; in 2: $\frac{1}{2}$

5. a) entfällt b) f(0) = –5 c) in 0: entfällt ; in 2: f(2) = $\frac{1}{2}$

6. a) b) c)







Lektion 3

Aufgaben zu 3.1

1.

$y'=f'(x)$	$x_1 = 4$	$x_2 = \frac{3}{2}$	$x_3 = -0{,}5$
$y' = 2x$	8	3	–1
$y' = 3x^2$	48	$\frac{27}{4}$	0,75
$y' = 4x^3$	256	$\frac{27}{2}$	–0,5

2.

Die Ausgangsfunktion ...	Weil die Ableitungsfunktion...
– fällt für folgende x-Werte: **x < 0**	**für x<0 negativ ist.**
– steigt für folgende x- Werte: **x > 0**	**für x>0 positiv ist.**
– hat für folgende x-Werte eine horizontale Tangente: **x = 0**	**für x=0 den Wert 0 hat.**

Aufgaben zu 3.2

1. a) $y' = 10x^9$ b) $y' = 23x^{22}$

2. $y = x^7$

3. $y' = 8x^7$; $f'(1) = 8$

Aufgaben zu 3.3

1. (–2 | 16) **2.** $y = -6x-5$ **3.** $y' = (r+1)x^r$

Wiederholungsaufgaben

1. –192 **2.** (–2 | 4) **3.** $y = 4x-3$ **4.** $y' = (k-2)x^{k-3}$ **5.** (0 | –2,56)

6. (1) Für x<0 ist die Steigung der Ausgangsfunktion positiv und nicht negativ.
(2) In x=0 ist die Steigung der Ausgangsfunktion 0 und nicht –1.
(3) Für x>0 ist die Steigung der Ausgangsfunktion positiv und nicht negativ.

Lektion 4

Aufgaben zu 4.1

1. a) $y' = 25x^4$ b) $y' = x^4$ c) $y' = 21x^{11}$

2. a) –1 b) –144 c) –2

Aufgaben zu 4.2

1.

Grad	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
4	**0**	**0**	**0**	**2**	**–6**	**5**	**–15**	**0**

2.

Grad	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
6	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–16**

3.

Grad	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
4	**0**	**0**	**0**	**16**	**–48**	**36**	**0**	**0**

4.

Grad	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
7	**2**	**0**	**–1**	**2**	**–6**	**–1**	**0**	**–6**

Aufgaben zu 4.3

1. a) $y' = 25x^4 - 9x^2 + x + 3$ b) $y' = 4x^5 - 3x^2$ c) $y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

d) $y' = 10x^4 + 12x^2 - 30$

2. a) $\frac{7}{2}$ b) 8 c) 0,064 d) 0

3. Die Tangentensteigung im Punkt (4|1,8) ist 0. Der Graph hat dort eine horizontale Tangente. Im betrachteten Bereich ist dies der höchste Punkt. Das heißt: Bei einer Produktion von 4 Tonnen wird der größte Gewinn erzielt.

Aufgaben zu 4.4

1. a) $-\frac{1}{4}$; b) –48 ; c) 10 ; d) –6,25 ; e) $\frac{1}{4}$; f) 1 ; g) –15 ; h) –0,5

2. (1 | 1) ; $f'(1) = -1$; $g'(1) = \frac{1}{2}$ **3.** $x = 4$ **4.** $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

5. Die Ableitung ist $y' = -\frac{1}{x^2}$. Welchen Wert man auch für x einsetzt, y' ist immer negativ.

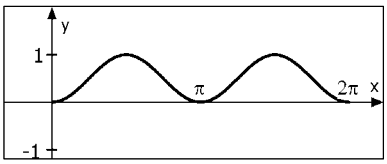
Aufgaben zu 4.5

1. a) 0,707 b) –0,707

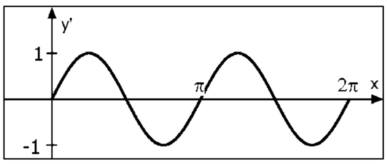
2. $y' = a \cdot \cos x$; Es ist $a \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

3. $y' = \cos x - \sin x$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}707 + 0{,}707 = 0$

4. Ausgangsfunktion $y = (\sin x)^2$



Ableitungsfunktion y'



Wiederholungsaufgaben

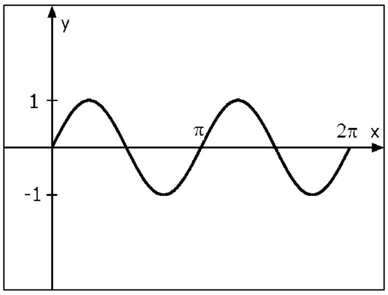
1. a) $y' = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$ b) $y' = 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \sin$ c) $y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}$

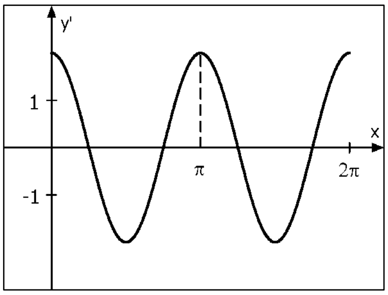
d) $y' = 30x^4 - 24x^3 + 36x^2 - 24x$

2. a) 0,2064 b) –100 c) –0,707 d) $\frac{1}{3}$

3. $x = \frac{1}{256}$ **4.** $x_1 = 2$; $x_2 = -2$ **5.** $x_1 = 0$; $x_2 = -1$

6. Ausgangsfunktion y = sin 2x Ableitungsfunktion y'

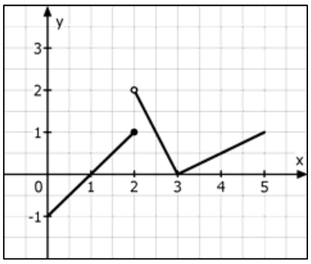




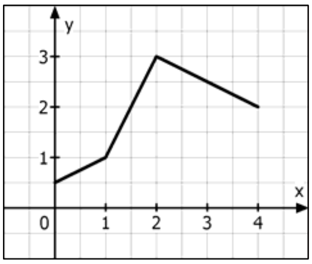
Lektion 5

Aufgaben zu 5.1

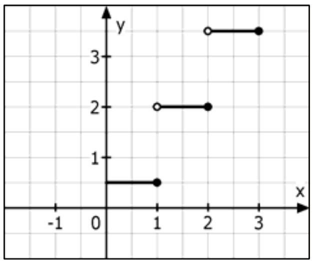
1. a)



b)

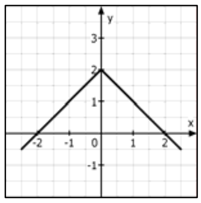


c)



2. a)

$$y = \begin{cases} x + 2 & \text{für } -2{,}5 \le x \le 0 \\ -x + 2 & \text{für } 0 < x \le 2{,}5 \end{cases}$$



Anmerkung: Der Punkt (0|2) wurde in der angegebenenen Lösung dem linken Teilgraphen zugeordnet. Genau so gut hätte man den Punkt auch dem rechten Teilgraphen zuordnen können. Dann würde die Lösung, die ebenfalls richtig ist, heißen:

$$y = \begin{cases} x + 2 & \text{für } -2{,}5 \le x < 0 \\ -x + 2 & \text{für } 0 \le x \le 2{,}5 \end{cases}$$

Im Folgenden wird in vergleichbaren Fällen immer nur eine von zwei oder mehreren Lösungen angegeben.

b) $y = \begin{cases} x-1 & \text{für } -1{,}5 \le x < 0{,}5 \\ x+0{,}5 & \text{für } 0{,}5 \le x \le 2 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 3x & \text{für } -0{,}5 \le x \le 1 \\ -0{,}5x+1{,}5 & \text{für } 1 < x \le 3 \\ x-3 & \text{für } 3 < x \le 4{,}5 \end{cases}$

3. a) $y = \begin{cases} -x & \text{für } x \le 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x+1 & \text{für } x \le 1 \\ x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -2x-2 & \text{für } x \le -1 \\ 2x+2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} -2x+2 & \text{für } x \le 0 \\ 2x+2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

e) $y = \begin{cases} x^2-1 & \text{für } x \le -1 \\ 1-x^2 & \text{für } -1 < x < 1 \\ x^2-1 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} -x^3+x & \text{für } x \le -1 \\ x^3-x & \text{für } -1 < x < 0 \\ -x^3+x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ x^3-x & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$

Aufgaben zu 5.2

1.

	Annäherung von links an P(2 | 8) $y = x^3$	Annäherung von rechts an P(2 | 8) $y = 2x^2$
Wahl eines Punkts Q	$Q\,(2-h \mid (2-h)^3$ d.h. $Q\,(2-h \mid -h^3+6h^2-12h+8)$	$Q\,(2+h \mid 2(2+h)^2$ d.h. $Q\,(2+h \mid 8+8h+2h^2)$
Differenz der y-Werte von Q_1 und P	$(-h^3+6h^2-12h+8)-8$	$(8+8h+2h^2)-8$
Differenz der x-Werte von Q_1 und P	$(2-h)-2=-h$	$(2+h)-2=h$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{-h^3+6h^2-12h}{-h} = h^2-6h+12$	$\frac{8h+2h^2}{h} = 8+2h$
Grenzwert für h→0	$\lim\limits_{h\to 0}(h^2-6h+12) = \mathbf{12}$	$\lim\limits_{h\to 0}(8+2h) = \mathbf{8}$

Die Funktion ist im Punkt (2|8) nicht differenzierbar, weil links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen.

2.

	Annäherung von links an P(2 | 4) $y = 1{,}5x^2 - 2$	Annäherung von rechts an P(2 | 4) $y = 0{,}5x^3$
Wahl eines Punkts Q	Q $(2-h \mid 1{,}5(2-h)^2 - 2$ d.h. Q $(2-h \mid 1{,}5h^2-6h+4)$	Q $(2+h \mid 0{,}5(2+h)^3$ d.h. Q $(2+h \mid 0{,}5h^3+3h^2+6h+4)$
Differenz der y-Werte von Q_1 und P	$(1{,}5h^2 - 6h + 4) - 4$	$(0{,}5h^3 + 3h^2 + 6h + 4) - 4$
Differenz der x-Werte von Q_1 und P	$(2 - h) - 2 = -h$	$(2 + h) - 2 = h$
Quotient: $\frac{y-\text{Differenz}}{x-\text{Differenz}}$	$\frac{1{,}5h^2 - 6h}{-h} = -1{,}5h + 6$	$\frac{0{,}5h^3 + 3h^2 + 6h}{h} = 0{,}5h^2+3h+6$
Grenzwert für $h \to 0$	$\lim\limits_{h\to 0}(-1{,}5h + 6) = \mathbf{6}$	$\lim\limits_{h\to 0}(0{,}5h^2 + 3h + 6) = \mathbf{6}$

Die Funktion ist im Punkt (2|4) differenzierbar, weil links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen.

Aufgaben zu 5.3

1. a) $x_0 = 1$ Linker und rechter Grenzwert stimmen nicht überein.
b) $x_0 = 0$ Funktion ist an der Stelle x_0 nicht definiert.
c) $x_0 = 1$ Linker und rechter Grenzwert stimmen nicht mit dem Funktionswert überein.
d) $x_0 = 2$ Funktion ist an der Stelle x_0 nicht definiert.

2. a) nicht stetig b) stetig, aber nicht differenzierbar
c) nicht stetig d) nicht stetig

Wiederholungsaufgaben

1. a) $y = \begin{cases} -2x + 4 & \text{für } 0 \le x < 2 \\ 0{,}5x & \text{für } 2 \le x < 4{,}5 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x \le -1 \\ 2 & \text{für } 1 < x \le 2 \\ -x + 4 & \text{für } 2 < x \le 4 \end{cases}$

2. a) $y = \begin{cases} -x + 2 & \text{für } x \le 2 \\ x - 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x - 2 & \text{für } x \le 0 \\ x - 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \le -1 \\ -x^2 + 1 & \text{für } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{für } x \ge 1 \end{cases}$

3. a) $x_0 = 2$ Funktion ist an der Stelle x_0 nicht definiert.
b) $x_0 = 2$ Linker und rechter Grenzwert stimmen nicht überein.
c) $x_0 = 2$ Funktion ist an der Stelle x_0 nicht definiert.

Register